ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 74 – 5.4.2023

Eq. a variabili separabili

Nota: una equazione autonoma del I ordine in forma normale: $u'(x) = f(u(x))$ è a variabili separabili.

$$\frac{u'}{f(u)} = 1$$

Esempio $\boxed{u' = u^2}$ $\quad (u'(x) = u^2(x))$

voglio dividere per u^2.

Noto che $u(x) = 0$ è soluzione!

$$\boxed{u(x) = 0}$$

Se $u(x) \neq 0$ posso dividere per $u^2(x)$

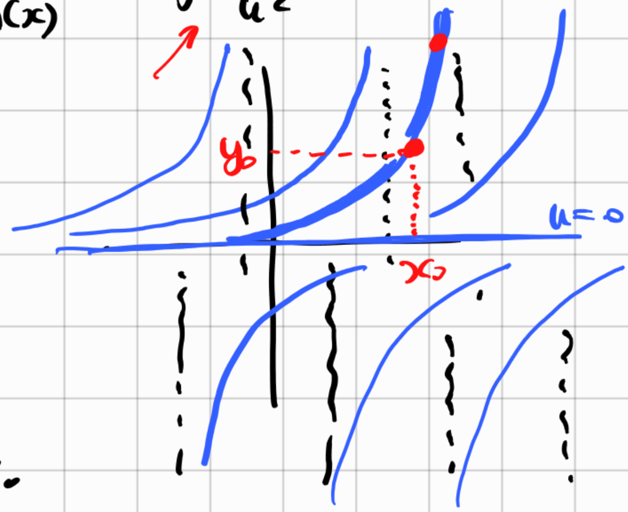
$c = -x_0$

$$\frac{u'(x)}{u^2(x)} = 1 \qquad \text{integro: } \int \frac{u'(x)\,dx}{u^2(x)} = x - x_0$$

$$-\frac{1}{u(x)} = \int \frac{du}{u^2}$$

$$-\frac{1}{u(x)} = x - x_0 \qquad (x \neq x_0)$$

$$u(x) = -\frac{1}{x - x_0}$$



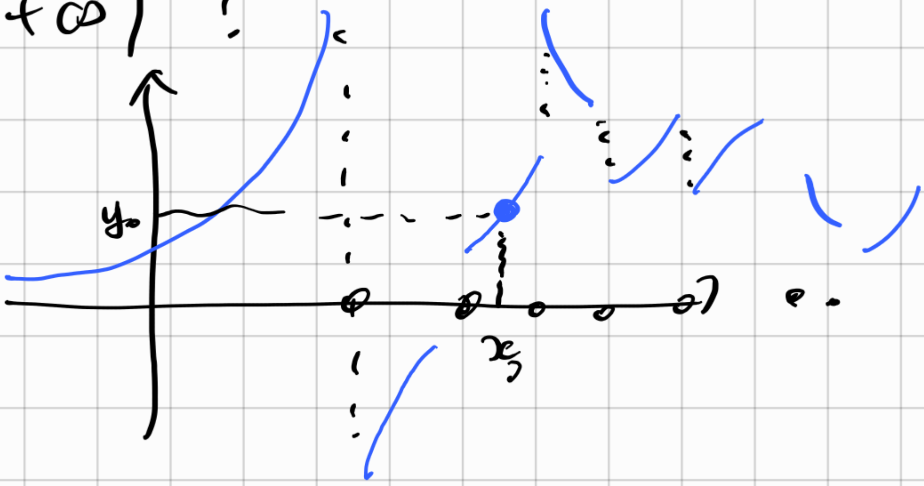
Se u è soluzione o $u \equiv 0$ oppure u coincide con $-\frac{1}{x-x_0}$ dove mai si annulla

dunque non si annulla mai perché $-\frac{1}{x-x_0}$ non tende a zero se non per $x \to \pm\infty$.

Le soluzioni non hanno esistenza globale. (c'è esistenza e unicità solo localmente).

- PERCHE' CONSIDERO SOLO SOLUZIONI DEFINITE SU UN INTERVALLO ?
- Perché $u(x) = -\frac{1}{x-x_0}$ non è definita su tutto $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ ma solo su $(-\infty, x_0)$ oppure $(x_0, +\infty)$?

- Perché allora anche questa roba qui: è soluzione.



•• Perché vedremo che per le soluzioni massimali definite su un intervallo, sotto opportune ipotesi (equazione di classe C^1 è sufficiente) c'è esistenza e unicità delle soluzioni che passano da un punto fissato.

Per casa risolvere:
- $u' = u^p$ con $p > 1$.
- $u' = u$

Esempio (Baffo di Peano)

$u' = \sqrt[3]{u}$ [$u' = f(u)$, $f \notin C^1$]

Notiamo che $u(x) = 0$ è soluzione $\boxed{u=0}$

Se $\boxed{u(x) \neq 0}$ posso dividere tutto per $\sqrt[3]{u}$

$c = -x_0$

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 1 \qquad \int \frac{u'(x)\,dx}{\sqrt[3]{u(x)}} = x - x_0$$

$$\begin{cases} u = u(x) \\ du = u'(x)\,dx \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = x - x_0$$

se $u>0$

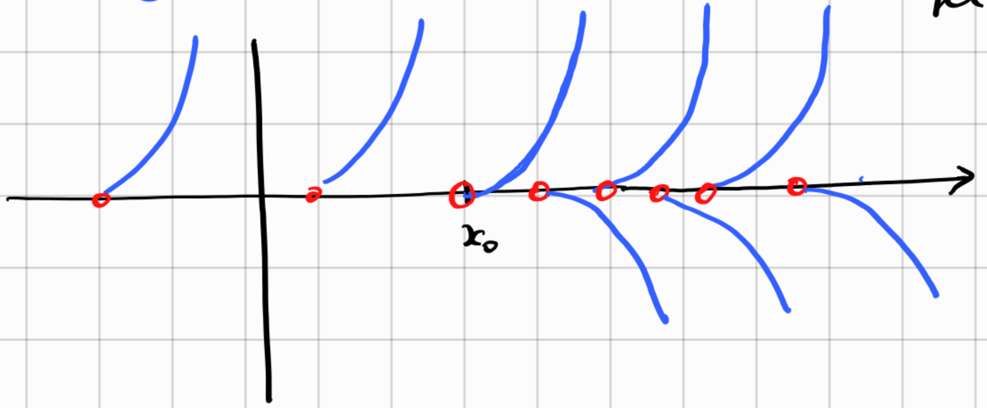
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\, du = \left[\int u^{-\frac{1}{3}}\, du = \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{u^2}$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{u^2_{(x)}} = x - x_0$$

$$u^2(x) = \left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^3$$

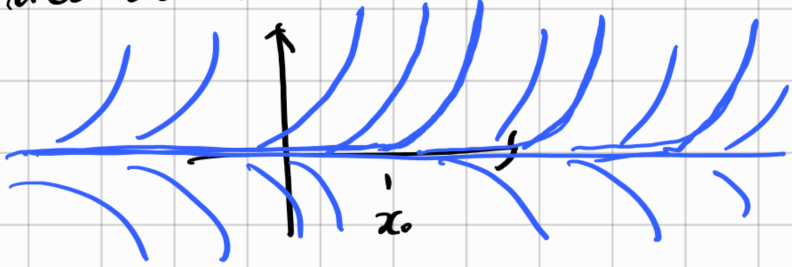
$$u(x) = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \sqrt{(x-x_0)^3}$$

è definita solo per $x > x_0$



Sarebbe meglio disegnarle così:

le soluzioni che ho trovato per $x \to x_0$ tendono a zero, che è anch'essa soluzione.
le soluzioni si "incollano".



Ho infinite soluzioni che si sovrappongono sulla retta $y = 0$

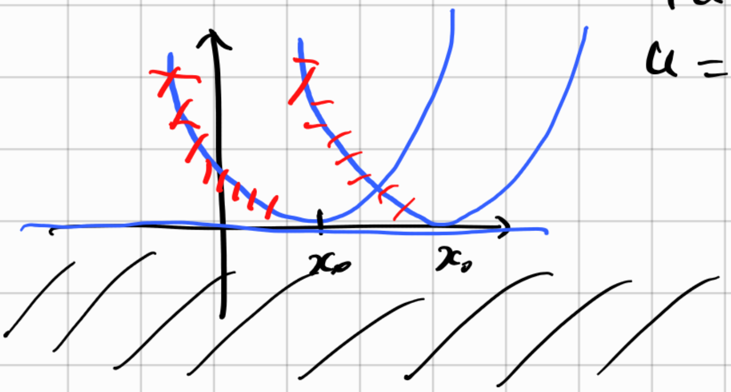
Esempio 2 $\quad u' = \sqrt{u} \quad \forall\, u \geq 0$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = 1 \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = x - x_0$$

$$2\sqrt{u} = x - x_0 \qquad \boxed{x > x_0}$$

$$4u = (x-x_0)^2$$

$$u = \frac{(x-x_0)^2}{4}$$



EQUAZIONI LINEARI di ORDINE n.

Faremo solo eq. lineari a coefficienti costanti. (in forma normale) di ordine n:

$$u^{(n)} + a_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = g(x)$$

$\uparrow$ coefficienti $\qquad a_k \in \mathbb{R} \qquad \uparrow$ può dipendere da x.

EQUAZIONI OMOGENEE $\quad g = 0$

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0} \qquad (*)$$

Esempio 1 $\quad u'' + u = 0 \qquad$ (oscillatore armonico) (lo vediamo dopo)

Esempio 0 $\quad u'' - u = 0 \qquad u'' = u.$

$u_1(x) = e^{x}$ è soluzione $\quad u_2(x) = e^{-x}$ è soluzione e quindi, per linearità, anche $u(x) = A\cdot e^{x} + B e^{-x}$ è soluzione $\forall A, B \in \mathbb{R}$.

Infatti l'equazione si può scrivere nella forma:

nel caso algebrico $(Mx = b)$

$$L[u] = 0$$

è uno spazio vettoriale reale (di dimensione infinita).

$$L : C^{n} \to C^{n}$$
$$u \mapsto u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u$$

L è lineare?

$$\boxed{\begin{gathered}(A+B)(u) = A(u) + B(u).\\ (\lambda A)(u) = \lambda \cdot A(u)\end{gathered}}$$

$$L = D^{n} + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 \cdot D + a_0 \cdot I$$

$D : C^{k} \to C^{k-1}$ è lineare.

$D^2 = D \circ D$ è lineare

$\vdots$

$D^{n} = \underbrace{D \circ D \circ \dots \circ D}_{k \text{ volte}}$ è lineare.

<u>Prova</u> nel caso specifico $u'' - u = 0$

$$Lu = u'' - u$$

$$L[u+v] = (u+v)'' - (u+v) = u'' + v'' - u - v$$
$$= u'' - u + v'' - v$$
$$= L[u] + L[v]$$

$$L[\lambda u] = (\lambda u)'' - \lambda u$$
$$= \lambda \cdot u'' - \lambda u = \lambda (u'' - u)$$
$$= \lambda \cdot L[u] \qquad \square$$

Notiamo dunque che l'insieme delle soluzioni:

$$V = \{u \in C^\infty : u \text{ risolve } (*)\} = \{u : L[u]=0\}$$
$$= \operatorname{Ker} L$$

dunque V è un sottospazio vettoriale di C^∞.

Se $u_1 \dots u_N$ sono soluzioni anche

$A_1 u_1 + \dots + A_N u_N$ sono soluzioni.

Torniamo a $u'' - u = 0$

$u_1 = e^x$ è sol. $\quad u_2 = e^{-x}$ è sol.

dunque $u(x) = A e^x + B e^{-x}$ è soluzione.

$\dim V \geq 2.$ perché e^x e e^{-x} sono indipendenti

Ci sono altre soluzioni?

Vedremo che No, non ci sono altre soluzioni perché

$\dim V = n$ dove $n =$ ordine della equazione.

Ci sono altre soluzioni della forma $u(x) = e^{\lambda x}$

$$u'' - u = \lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = (\lambda^2 - 1)\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda = \pm 1.$$

$\square$