

Analisi Matematica B

Prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

18 febbraio 2023

1. Si consideri la funzione $f: [9, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 9x^2}.$$

- (a) Dimostrare che f è invertibile e chiamata $g: [0, +\infty) \rightarrow [9, +\infty)$ la funzione inversa di f calcolare, se esiste, $g'(0)$.
- (b) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = a\sqrt{x^3} + b\sqrt{x} + o(\sqrt{x}), \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

- (c) Calcolare, se esiste, $g''(0)$.

2. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^3 x \cdot (1 - \cos x).$$

- (a) Determinare l'immagine di f ovvero l'insieme $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.
- (b) Dimostrare che esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}}{x^4}.$$