Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23
Università di Pisa

18 febbraio 2023

1. Si consideri la funzione $f\colon [9,+\infty) \to [0,+\infty)$ definita da
$$f(x) = \sqrt{x^3 - 9x^2}.$$
   (a) Dimostrare che f è invertibile e chiamata $g\colon [0,+\infty) \to [9,+\infty)$ la funzione inversa di f calcolare, se esiste, $g'(0)$.
   (b) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che
$$f(x) = a\sqrt{x^3} + b\sqrt{x} + o(\sqrt{x}), \qquad \text{per } x \to +\infty.$$
   (c) Calcolare, se esiste, $g''(0)$.

Svolgimento. Possiamo scrivere $f(x) = x\sqrt{x-9}$. Per $x > 9$ la funzione f è derivabile e si ha
$$f'(x) = \sqrt{x-9} + \frac{x}{2\sqrt{x-9}} > 0$$
Per il criterio di monotonia f, che è continua, è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[9,+\infty)$. Dunque è iniettiva. Visto che $f(9) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la funzione f, essendo continua, assume tutti i valori in $[0,+\infty)$. Dunque $f\colon [9,+\infty) \to [0,+\infty)$ è bigettiva.

Sia g la funzione inversa. Si ha, per definizione di derivata, e facendo il cambio di variabile $y = f(x)$, $x = g(y)$:
$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{g(y) - g(0)}{y} = \lim_{x\to 9^+} \frac{x-9}{f(x)} \\ &= \lim_{x\to 9^+} \frac{x-9}{x\sqrt{x-9}} = \lim_{x\to 9^+} \frac{\sqrt{x-9}}{x} = 0. \end{aligned}$$

Similmente possiamo calcolare la derivata seconda ricordando che se $y \neq 0$ allora $g'(y) = 1/f'(g(y))$:

$$
\begin{aligned}
g''(0) &= \lim_{y \to 0^+} \frac{g'(y) - g'(0)}{y} = \lim_{x \to 9^+} \frac{\frac{1}{f'(x)} - 0}{f(x)} \\
&= \lim_{x \to 9^+} \frac{1}{x\sqrt{x-9} \cdot (\sqrt{x-9} + \frac{x}{2\sqrt{x-9}})} = \frac{2}{81}.
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda la stima asintotica all'infinito (b) basta osservare che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$ e quindi, usando la formula $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ per $t \to 0$, si trova:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^3 - 9x^2} = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{x}} = \sqrt{x^3}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \sqrt{x^3} - \frac{9}{2}\sqrt{x} + o(\sqrt{x})
\end{aligned}
$$

da cui $a = 1$, $b = -\frac{9}{2}$. □

2. Si consideri la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin^3 x \cdot (1 - \cos x).$$

(a) Determinare l'immagine di f ovvero l'insieme $\{f(x) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

(b) Dimostrare che esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L.$$

Svolgimento. La funzione f è continua quindi, per il teorema dei valori intermedi, l'immagine $f(\mathbb{R})$ è un intervallo. Basterà quindi trovare, se esistono, il massimo e il minimo di f per determinare gli estremi dell'intervallo immagine. Inoltre f è 2π-periodica e dispari, basterà quindi studiarla sull'intervallo $[0, \pi]$. Si ha

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot (1 - \cos x) + \sin^4 x \\
&= \sin^2 x\big(3\cos x - 3\cos^2 x + \sin^2 x\big) = \sin^2 x\big(3\cos x - 4\cos^2 x + 1\big) \\
&= \sin^2 x(1 - \cos x)(4\cos x + 1).
\end{aligned}
$$

Risulta quindi che $f'(x) \geq 0$ per $x \in [0, \arccos(-1/4)]$ e $f'(x) \leq 0$ per $x \in [\arccos(-1/4), \pi]$. Dunque f ha massimo nel punto $x =$

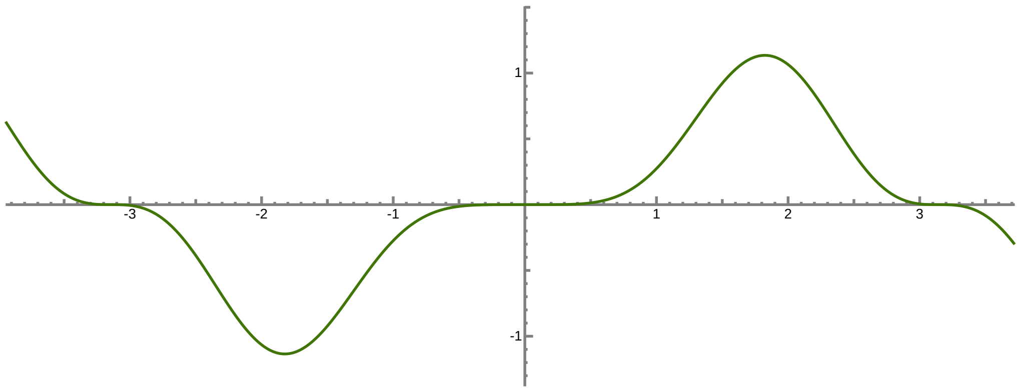

Figure 1: Andamento della funzione f del secondo esercizio.

$\arccos(-1/4)$ e minimo (relativamente all'intervallo $[0,\pi]$) nei punti 0 e π dove la funzione si annulla. L'andamento di f è quello mostrato in figura. Nel punto di massimo si ha $\cos x = -1/4$ e $\sin x = \sqrt{1-1/16} = \sqrt{15}/4$. Dunque

$$\begin{aligned} \max f([0,\pi]) &= f(\arccos(-1/4)) = \frac{15\sqrt{15}}{64}\cdot\frac{5}{4} = \frac{75\sqrt{15}}{256} \\ \min f([0,\pi]) &= f(0) = f(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Dalla periodicità di f e dalla simmetria rispetto all'origine, possiamo quindi concludere che l'immagine di f è

$$f(\mathbb{R}) = [-\max f, \max f] = \left[-\frac{75\sqrt{15}}{256}, \frac{75\sqrt{15}}{256}\right].$$

Per la seconda parte si può applicare il teorema di Lagrange. Se $x \neq y$ deve esistere un punto z tale che

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(z)|.$$

La derivata f' è una funzione continua e quindi, per il teorema di Weistrass, è limitata sull'intervallo $[-\pi,\pi]$. Ma f' è periodica come f, quindi f' è limitata su tutto $\mathbb{R}$ cioè esiste $L > 0$ tale che $|f'(z)| \leq L$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

3. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}}{x^4}.$$

Svolgimento. Sarà sufficiente sviluppare il numeratore con le formule di Taylor fino all'ordine quattro. Per $x \to 0$ si ha:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

da cui

$$\begin{aligned}(1+x)^x &= e^{x\ln(1+x)} = e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\big(x^2 + o(x^2)\big)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}(1+\sin x)^{\sin x} &= 1 + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{5}{6}\sin^4 x + o(\sin^4 x) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - \frac{1}{2}\big(x + o(x^2)\big)^3 + \frac{5}{6}(x + o(x))^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Facendo la differenza si ottiene:

$$\frac{(1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} \to \frac{1}{3}.$$

$\square$