ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 30 - 2. 12. 2022

Successione di Fibonacci.

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1$

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \qquad a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

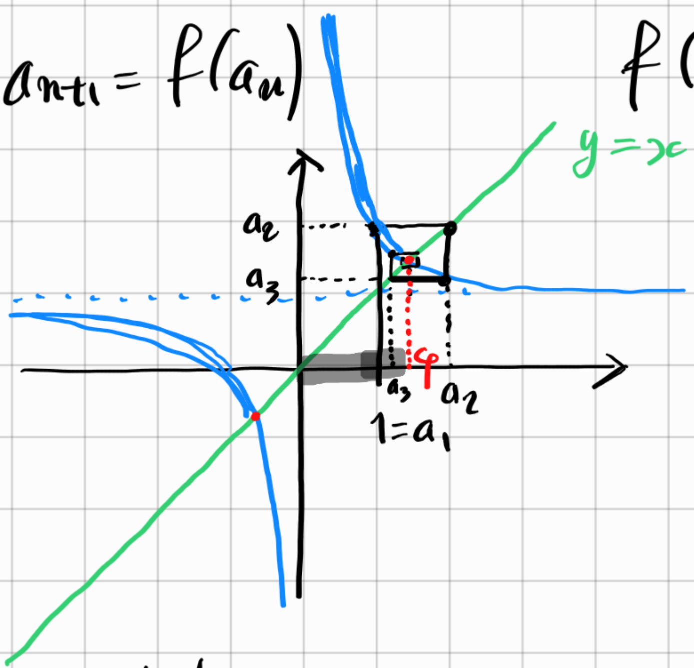
$$= 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}}$$

Determinare, se esiste, il limite di a_n per $n \to +\infty$.

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$



$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$a_3 = \frac{3}{2}$

Graficamente intuisco che:

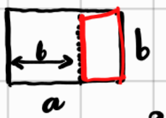
a_{2n+1} è crescente e converge al punto fisso

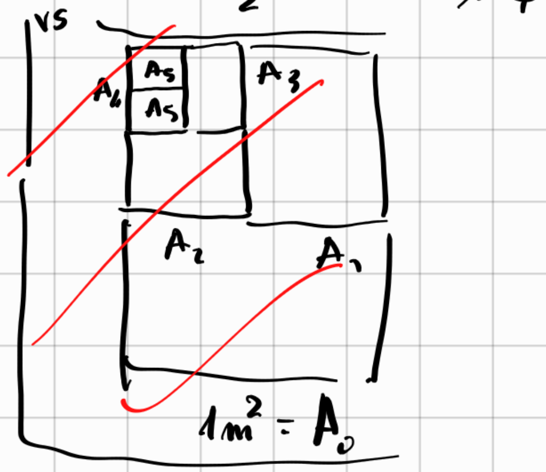
a_{2n+2} è decrescente " " allo stesso punto fisso.

(1) Trovo i punti fissi: $1+\frac{1}{x}=x$ $\qquad [f(x)=x]$

$$x+1=x^2 \qquad \underline{x^2-x-1=0} \qquad x_{12}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}= \begin{cases}\varphi \\ 1-\varphi\end{cases}$$

$x_2=\varphi$ costante aurea





$$\varphi=\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b} \qquad a^2-ab=b^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}=1$$

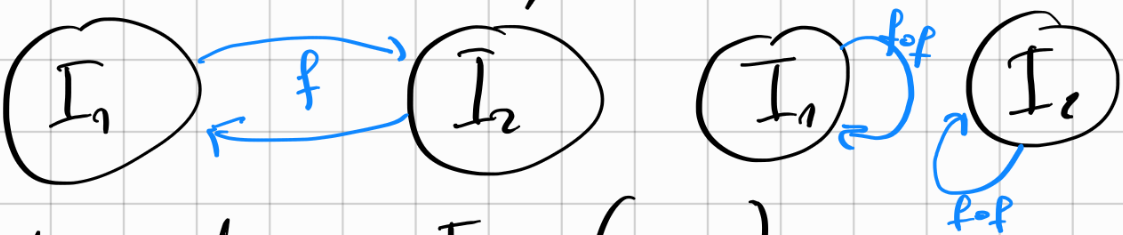
$$1-\varphi=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \varphi^2=\varphi+1.$$

$$\varphi^2=\varphi+1 \qquad \varphi=1+\frac{1}{\varphi} \qquad \frac{1}{\varphi}=\varphi-1$$

<u>Oss</u> $I=(0,+\infty)$ è invariante $\quad x>0 \Rightarrow f(x)=1+\frac{1}{x}>0$

$$I_1=(0,\varphi] \qquad I_2=[\varphi,+\infty)$$

mi sembra che $f(I_1)\subseteq I_2$, $f(I_2)\subseteq I_1$



$f(x)$ è decrescente su I $\quad (x>0)$

$$\left(x_1>x_2>0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}\right)$$

$$0<x \overset{\geq}{\leq} \varphi \Rightarrow f(x) \overset{\leq}{\geq} f(\varphi)=\varphi$$

$$x\in I_1 \Rightarrow f(x)\in I_2.$$

$$x\in I_2 \Rightarrow f(x)\in I_1.$$

<u>Idea</u>: studiare $f\circ f$

$$a_{2n+2}=(f\circ f)(a_{2n}).$$

a_{2n}

$$a_{2(n+1)}=a_{2n+2}=f(a_{2n+1})=f(f(a_{2n}))$$

a_{2n+1}

$$a_{2n+3}=f(f(a_{2n+1}))$$

f decrescente $\Rightarrow$ $f \circ f$ è crescente

$x_1 \leq x_2$
$\Downarrow$
$f(x_1) \geq f(x_2)$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) \leq f(f(x_2))$

Osservazione Teorema. (i) Se f è crescente e $a_{n+1} = f(a_n)$ allora a_n è monotona

(ii) Se f è decrescente e $a_{n+1} = f(a_n)$ allora a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone, una è crescente e l'altra decrescente.

dim

(i) Supponiamo $a_1 \geq a_0 \ (\leq)$ dimostro che a_n è crescente

$$a_{n+1} \overset{(\leq)}{\geq} a_n \overset{f \text{ crescente}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(a_{n+1})}_{a_{n+2}} \overset{(\leq)}{\geq} \underbrace{f(a_n)}_{a_{n+1}} \Rightarrow a_{n+2} \overset{(\leq)}{\geq} a_{n+1}.$$

(ii) Se f è decrescente $f \circ f$ è crescente

a_{2n} soddisfa $a_{2(n+1)} = (f \circ f)(a_{2n})$

$\Rightarrow a_{2n}$ è monotona (per (i))

per a_{2n+1} vale lo stesso $\Rightarrow a_{2n+1}$ è monotona.

$$a_{2n+2} \overset{(\leq)}{\geq} a_{2n} \Rightarrow a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) \overset{(\geq)}{\leq} f(a_{2n}) = a_{2n+1}$$

se a_{2n} è crescente $\Rightarrow$ a_{2n+1} è decrescente
e vice versa. $\square$

Tornando all'esercizio:

$I = (0, +\infty)$ invariante $\qquad f : I \to I$

$f \circ f : I \to I$

$f \circ f$ è decrescente

per il teorema a_{2n+1} e a_{2n} sono monotone una crescente l'altra decrescente.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{3}{2} > 1 = a_1$

a_{2n+1} è crescente
a_{2n} è decrescente.

I_1 è invariante per $f \circ f$

$a_1 \in I_1 \Rightarrow a_{2n+1} \in I_1 \ \forall n.$

$a_{2n+1} \to l_1$
$a_{2n+2} \to l_2$

$0 < a_{2n+1} \leq \varphi$
$0 \leq l_1 \leq \varphi$

$\neq$ a_{2n+1} è crescente

$a_{2n+1} \geq a_1 > 0$
$l_1 \geq a_1 > 0.$

$0 < l_1 \leq \varphi$

$$a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1}))$$

$$\boxed{l_1 = f(f(l_1))}$$

$$a_{2n+3} = f\left(1 + \frac{1}{a_{2n+2}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2n+1}}} \to \begin{cases} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{l_1}} & \text{se } l_1 \neq 0 \\ 1 & \text{se } l_1 = 0 \end{cases}$$

avrei $0 = 1$ impossibile.

$$l_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{l_2}}$$

Voglio risolvere $\underbrace{x = f(f(x))}$

$$\boxed{x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$x = 1 + \frac{x}{x+1}$$

$$x(x+1) = (x+1) + x$$

$$x^2 + x = 2x + 1 \qquad x^2 - x - 1 = 0.$$

I punti fissi di f coincidono con i punti fissi di $f \circ f$.

<u>Oss</u> in generale se x è punto fisso di f

$$f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$$

x è punto fisso di f.

Ma è possibile che $f \circ f$ abbia più punti fissi di f.

Tornando all'esercizio:

l_1 e l_2 sono punti fissi di f.

ma l_1 e l_2 sono positivi $\Rightarrow l_1 = l_2 = \varphi$.

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n+1} \to \varphi \\ a_{2n+2} \to \varphi \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \to \varphi. \qquad \square$$

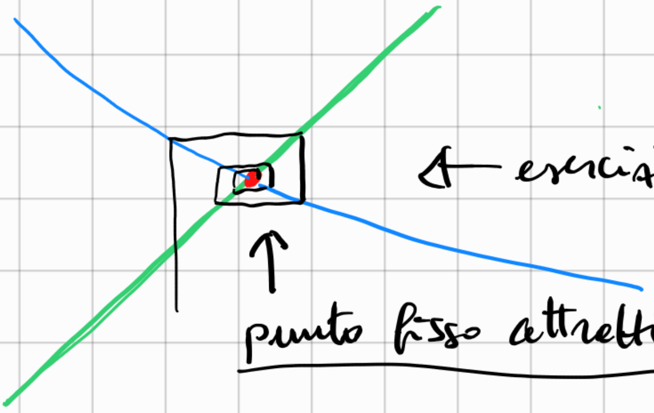
Abbiamo mostrato che $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi$

[posso concludere che $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \sim c \cdot \varphi^n$? [TEMO di NO]]

Posso concludere che $\sqrt[n]{F_n} \to \varphi$ ⚠

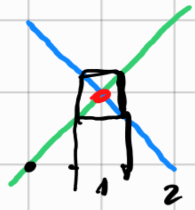
$\boxed{\sqrt[n]{F_n} \sim \varphi}$ $\overset{\text{NO}}{\cancel{\Rightarrow}}$ $F_n \sim \varphi^n$

Idea:

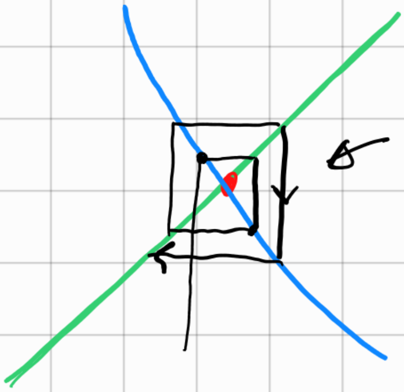


← esercizio precedente

punto fisso attrattivo

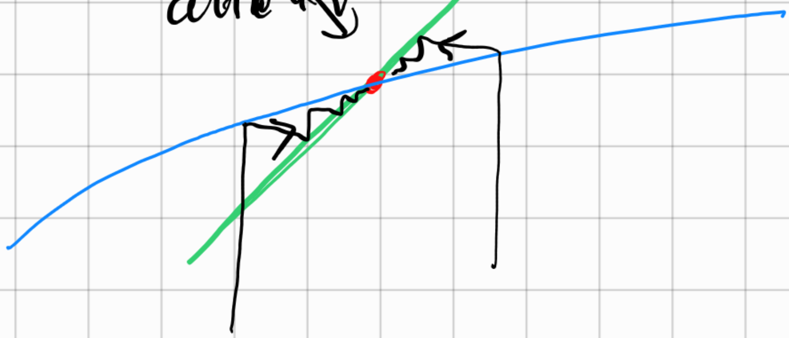


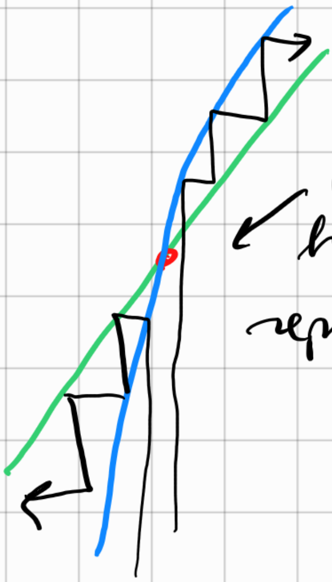
ES $a_{n+1} = 2 - a_n$



← punto fisso repulsivo.

punto fisso attrattivo

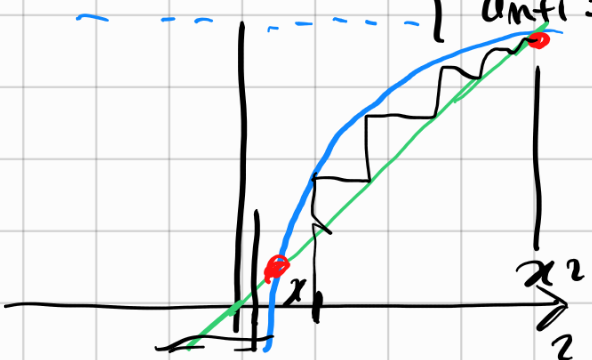




← punto fisso repulsivo

Esercizio 7.10

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$



$y = 4 - \dfrac{1}{x}$

a_n è crescente $\to x_2$

x_{12} sono le sol: $4 - \frac{1}{x} = x$

$4x - 1 = x^2$

$x^2 - 4x + 1 = 0.$

$\square$

Se $\frac{a_n}{b_n} \to c$ $\quad 0 < c < +\infty$

$a_n \sim c \cdot b_n.$