

Analisi Matematica A e B

Prova scritta n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2021/22
Università di Pisa

12 luglio 2022

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha \cdot (x - \sin x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}}$$

2. (a) Mostrare che la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^x + x^5 - x^3 + 3x$$

è strettamente crescente.

- (b) Verificare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = \lambda \tag{1}$$

ha una e una sola soluzione.

- (c) Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che associa ad ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la corrispondente soluzione di (1). Dimostrare che g è derivabile e calcolare $g'(1)$.

3. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{x^4} + \sin x.$$