Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2021/22
Università di Pisa

23 aprile 2022

1. Determinare i valori del parametro reale α per i quali il seguente integrale è convergente:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|1+x|}\cdot(1+|x|^\alpha)}\,dx.$$
Calcolare inoltre il valore dell'integrale per $\alpha = 1$.

Svolgimento. I punti "cattivi" da prendere in considerazione sono: $-\infty$, -1 e $+\infty$. Per $x \to \pm\infty$ si ha $\sqrt{|1+x|} \sim |x|^{\frac{1}{2}}$ e se $\alpha > 0$ si ha $1 + |x|^\alpha \sim |x|^\alpha$. Dunque se $\alpha \geq 0$ la funzione integranda $f(x)$ è asintotica a
$$f(x) \sim \frac{1}{|x|^{\alpha+\frac{1}{2}}} \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$
e per avere convergenza dell'integrale dovrà quindi essere $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. Se $\alpha < 0$ si ha $f(x) \sim |x|^{-\frac{1}{2}}$ e quindi l'integrale non converge.

Per $x \to -1$ si ha $(1 + |x|^\alpha) \sim 2$ dunque
$$f(x) \sim \frac{1}{2\cdot|1+x|^{\frac{1}{2}}}$$
e l'integrale converge, in un intorno di $x = -1$, qualunque sia α.

In definitiva l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Calcoliamo ora il valore dell'integrale per $\alpha = 1$. Suddividiamo l'intervallo di integrazione in modo da eliminare i valori assoluti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-1-x}\cdot(1-x)} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot(1-x)} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot(1+x)}.$$

Per il primo integrale facciamo il cambio di variabile $t = \sqrt{-1-x}$, $x = -1-t^2$, $dx = -2t\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-1-x}\cdot(1-x)} &= \int_{+\infty}^{0} \frac{-2t\,dt}{t\cdot(2+t^2)}\\ &= \int_{0}^{+\infty} \frac{2dt}{2+t^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\\ &= \left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Per il secondo integrale facciamo il cambio di variabile $t = \sqrt{1+x}$, $x = t^2-1$, $dx = 2t\,dt$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot(1-x)} &= \int_{0}^{1} \frac{2t\,dt}{t\cdot(2-t^2)} = \int_{0}^{1} \frac{2\,dt}{(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}+t}+\frac{1}{\sqrt{2}-t}\right]dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+t)-\ln(\sqrt{2}-t)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\frac{(\sqrt{2}+t)^2}{2-t^2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

Per il terzo integrale si ha:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot(1+x)} &= \int_{1}^{+\infty} (1+x)^{-\frac{3}{2}}\,dx\\ &= -2\Big[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big]_1^{+\infty} = 2.\end{aligned}$$

Sommando i tre integrali si ottiene il valore dell'integrale richiesto

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1) + 2.$$

$\square$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 2u' + 2u = \sin x \cos x \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Si tratta di una equazione del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. Il polinomio associato all'equazione è $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ che ha due radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Dunque la soluzione generale dell'omogenea associata è

$$u_0(x) = a \cdot e^x \sin x + b \cdot e^x \cos x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea possiamo utilizzare il metodo di similarità. Infatti scriviamo $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$ e cerchiamo quindi una soluzione della forma:

$$u_*(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x).$$

Facendo le derivate:

$$\begin{aligned} u_*'(x) &= 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) \\ u_*''(x) &= -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x) \end{aligned}$$

che, sostituendo nell'equazione, ci danno:

$$\begin{aligned} u_*'' - 2u_*' + 2u_* &= (-2A + 4B)\sin(2x) + (-2B - 4A)\cos(2x) \\ &\overset{!}{=} \frac{1}{2}\sin(2x) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} -2A + 4B = \frac{1}{2} \\ -4A - 2B = 0 \end{cases}$$

che risolto dà: $A = -\frac{1}{20}$, $B = \frac{1}{10}$. Quindi la soluzione generale della non omogenea è:

$$u(x) = e^x(a\sin x + b\cos x) + \frac{2\cos(2x) - \sin(2x)}{20}.$$

La derivata è

$$u'(x) = e^x((a+b)\cos x + (a-b)\sin x) - \frac{2\sin(2x) + \cos(2x)}{10}$$

Imponendo $u(0) = 0$ e $u'(0) = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} b + \frac{1}{10} = 0 \\ a + b - \frac{1}{10} = 0 \end{cases}$$

da cui $b = -\frac{1}{10}$ e $a = \frac{1}{5}$ e quindi

$$u(x) = \frac{e^x \cdot (4\sin x - 2\cos x) + 2\cos(2x) - \sin(2x)}{20}$$

□

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$u' = (2x+1) \cdot \sqrt[4]{u^3}.$$

(a) determinare la soluzione che soddisfa la condizione $u(0) = 1$;

(b) determinare più soluzioni che soddisfano la condizione $u(1) = 0$.

Dimostrazione. Svolgimento. Si tratta di una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Osserviamo che $u = 0$ è soluzione stazionaria dell'equazione e che per $u > 0$ c'è unicità della soluzione mentre per $u = 0$ potrebbe non esserci. Per $u < 0$ l'equazione non ha senso e quindi non ci sono soluzioni.

Determiniamo allora le soluzioni quando $u > 0$ dividendo ambo i membri per $\sqrt[4]{u^3}$:

$$u^{-\frac{3}{4}} u' = 2x + 1$$

integriamo ambo i lati in dx ricordando che $du = u'\,dx$:

$$4u^{\frac{1}{4}} = x^2 + x + c. \tag{1}$$

Ora visto che il lato sinistro è positivo anche il lato destro deve esserlo:

$$x^2 + x + c > 0. \tag{2}$$

Elevando alla quarta:

$$u(x) = \frac{(x^2 + x + c)^4}{4^4} \tag{3}$$

Imponendo la condizione $u(0) = 1$ in (1) si trova $c = 4$ e quindi

$$u(x) = \frac{(x^2 + x + 4)^4}{4}.$$

Visto che $x^2 + x + 4 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ la condizione (2) è soddisfatta e la soluzione rimane staccata da $u = 0$. Dunque questa è l'unica soluzione con la condizione $u(0) = 1$.

Se invece poniamo la condizione $u(1) = 0$ abbiamo già notato che $u(x) = 0$ è una soluzione. Ma potrebbero essercene altre perché l'unicità non è garantita. Se una soluzione non è identicamente nulla nelle zone in cui è positiva deve essere della forma (3) e deve però tendere a zero per ricollegarsi alla soluzione nulla. Affinché $x^2 + x + c = 0$ abbia soluzione deve essere $\Delta = 1 - 4c \geq 0$ ovvero deve essere $c \leq \frac{1}{4}$. Scelto $c \leq \frac{1}{4}$ la soluzione si annulla nei punti:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

per $x > x_2$ la soluzione è crescente mentre per $x < x_1$ la soluzione è decrescente. Nei punti x_1 e x_2 la soluzione si annulla con la sua derivata e quindi tra x_1 e x_2 la soluzione si incolla alla soluzione nulla $u = 0$. Affinché sia $u(1) = 0$ dovrà essere $x_2 \geq 1$ e fissato comunque $x_2 \geq 1$ si trova un valore di $c \leq 0$ per cui la soluzione (3) si annulla per $x = x_2$. Il punto x_1 può essere scelto $\leq \frac{1}{2}$. Dunque per ogni $x_1 \leq \frac{1}{2}$ e ogni $x_2 \geq 1$ si ha una soluzione della forma

$$u(x) = \begin{cases} \frac{(x^2+x-x_1^2-x_1)^4}{4^4} & \text{se } x \leq x_1, \\ 0 & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2, \\ \frac{(x^2+x-x_2^2-x_2)^4}{4^4} & \text{se } x \geq x_2. \end{cases}$$

Le soluzioni possono anche staccarsi da un solo lato, quindi nella definizione precedente si può anche intendere che sia $x_1 = -\infty$ o $x_2 = +\infty$. Se x_1 e x_2 non sono entrambi infiniti queste soluzioni sono di classe C^2 (anzi, C^3) ma non di classe C^∞ perché la derivata quarta tende ad un valore diverso a destra e a sinistra dei punti x_1 e x_2.

Dunque ci sono ∞^2 soluzioni di classe C^2 e una sola soluzione (quella nulla) di classe C^∞. $\square$