

Prova scritta parziale n. 2

Analisi Matematica A e B, 2021/22

19.2.2022

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x + \ln(e^x - x) - \frac{1}{2}(\tan x - x)}{\arctan(x^2) \cdot \arcsin(x^2) \cdot \cos(e^x + x)}.$$

2. Si consideri la serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt{\frac{1}{n} + 2n \cos \frac{1}{n}} - \sqrt{2n} \right)^\alpha.$$

(a) Mostrare che $\sqrt{x + \frac{2}{x} \cos x} - \sqrt{\frac{2}{x}} > 0$ per ogni $x \in (0, 1]$ (cosicché la serie è ben definita).

(b) Per quali α la serie converge assolutamente?

(c) Facoltativo: per quali α la serie converge (semplicemente)?

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{3 - x}{1 + \ln x}$$

determinare il più grande intervallo $I \subset \mathbb{R}$ contenente il punto $x = 1$ sul quale $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ risulta essere iniettiva. Su tale intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è anche suriettiva? Calcolare, se esiste, $(f^{-1})'(2)$. (Si intende che f^{-1} è l'inversa di f ristretta all'intervallo I).