

## Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Analisi Matematica A e B, 2021/22

19.2.2022

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x + \ln(e^x - x) - \frac{1}{2}(\tan x - x)}{\arctan(x^2) \cdot \arcsin(x^2) \cdot \cos(e^x + x)}.$$

*Soluzione.* Sviluppiamo con Taylor per  $x \rightarrow 0$  le funzioni coinvolte:

$$\begin{aligned}\ln \cos x &= \ln \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4); \\ \ln(e^x - x) &= \ln \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4); \\ -\frac{1}{2}(\tan x - x) &= -\frac{1}{2} \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) - x \right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^4); \\ \operatorname{arctg} x^2 &= x^2 + o(x^2); \\ \arcsin x^2 &= x^2 + o(x^2); \\ \cos(e^x + x) &= \cos(1) + o(1).\end{aligned}$$

Dunque la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite è uguale a

$$\begin{aligned}&\frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\cos(1) \cdot x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\cos(1) \cdot x^4 + o(x^4)} \rightarrow -\frac{1}{6 \cos 1}.\end{aligned}$$

□

2. Si consideri la serie al variare di  $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \sqrt{\frac{1}{n} + 2n \cos \frac{1}{n}} - \sqrt{2n} \right)^\alpha.$$

- (a) Mostrare che  $\sqrt{x + \frac{2}{x} \cos x} - \sqrt{\frac{2}{x}} > 0$  per ogni  $x \in (0, 1]$  (cosicché la serie è ben definita).
- (b) Per quali  $\alpha$  la serie converge assolutamente?
- (c) Facoltativo: per quali  $\alpha$  la serie converge (semplicemente)?

*Soluzione.* Poniamo

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{2 \cos x}{x}} - \sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{x^2}{2} + \cos x - 1} \right].$$

Osserviamo che la funzione è definita in  $(0, 1)$  in quanto su tale intervallo sia  $x$  che la funzione  $\cos x$  sono positive e dunque le radici quadrate sono definite. Osserviamo che  $f(x) > 0$  se e solo se

$$\frac{x^2}{2} + \cos x > 1$$

ovvero se e solo se

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0.$$

Si ha

$$g'(x) = x - \sin x$$

ed è ben noto che  $\sin x < x$  per ogni  $x > 0$  (altrimenti lo si può verificare derivando ulteriormente). Dunque  $g'(x) > 0$  per ogni  $x \in [0, 1]$  e  $g$  risulta essere strettamente crescente su tale intervallo. Dunque  $g(x) > g(0) = 0$  per  $x \in (0, 1]$  ed anche  $f(x) > 0$  in tale intervallo.

Per il punto (b) osserviamo che si tratta di studiare la convergenza assoluta della serie  $\sum a_n$  con

$$a_n = (-1)^n \cdot f^\alpha \left( \frac{1}{n} \right).$$

Per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{\frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} - 1 \right] \\ &= \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{x^4}{48} + o(x^4) - 1 \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot x^{\frac{7}{2}} + o(x^{\frac{7}{2}}) \end{aligned}$$

da cui

$$|a_n| = f^\alpha \left( \frac{1}{n} \right) \sim \frac{\sqrt{2}^\alpha}{48^\alpha \cdot n^{\frac{7\alpha}{2}}}$$

e visto che la serie  $\sum 1/n^p$  converge se e solo se  $p > 1$  e la nostra serie in valore assoluto è asintoticamente equivalente a questa con  $p = 7\alpha/2$ , dunque la nostra serie è assolutamente convergente se e solo se  $7\alpha/2 > 1$  ovvero  $\alpha > 2/7$ .

Per il punto (c) osserviamo innanzitutto che essendo  $|a_n| \sim C/n^{\frac{7\alpha}{2}}$  se  $\alpha \leq 0$  non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Se invece  $\alpha > 0$  si tratta di una serie a segni alterni con  $a_n \rightarrow 0$ . Per il teorema di Leibniz possiamo ottenere che la serie è convergente se riusciamo a dimostrare che  $|a_n|$  è definitivamente decrescente. Visto che  $|a_n| = f^\alpha(1/n)$  è sufficiente dimostrare che  $f(x)$  è crescente in un intorno destro di  $x = 0$ . Possiamo allora studiare la monotonia di  $f$  tramite lo studio del segno della derivata. Sappiamo che

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{x^4}{48} + o(x^4) \right].$$

Il termine tra parentesi quadre è lo sviluppo di una funzione di classe  $C^\infty$  in un intorno di zero dunque possiamo affermare che la derivata di tale funzione ammette uno sviluppo di Taylor all'ordine 3. Inoltre il polinomio di Taylor di ordine 3 non è altro che la derivata del polinomio di Taylor di ordine 4. Dunque derivando il prodotto si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} x^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{x^4}{48} + o(x^4) \right] + \sqrt{2} x^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{x^3}{12} + o(x^3) \right] \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{96} x^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) = \frac{7\sqrt{2}}{96} x^{\frac{5}{2}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Per la permanenza del segno esiste un intorno di  $x = 0$  in cui  $1 + o(1) > 0$  dunque in un intorno destro di  $x = 0$  si ha  $f'(x) > 0$  come volevamo dimostrare.  $\square$

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{3-x}{1+\ln x}$$

determinare il più grande intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  contenente il punto  $x = 1$  sul quale  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  risulta essere iniettiva. Su tale intervallo,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è anche suriettiva? Calcolare, se esiste,  $(f^{-1})'(2)$ . (Si intende che  $f^{-1}$  è l'inversa di  $f$  ristretta all'intervallo  $I$ ).

*Soluzione.* Si osservi innanzitutto che la funzione è definita solo se  $x > 0$  e  $x \neq 1/e$ . Si intende quindi che  $f: (0, 1/e) \cup (1/e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è definita sull'unione di due intervalli. Facendo i limiti agli estremi di questi intervalli si nota che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^\mp} f(x) &= \mp\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Studiamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1 - \ln x - \frac{3-x}{x}}{(1 + \ln x)^2} \\ &= -\frac{3 + x \ln x}{x(1 + \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Posto  $g(x) = 3 + x \ln x$  osserviamo che il segno di  $f'$  è opposto al segno di  $g$ . Studiamo quindi la funzione  $g(x)$ . Si ha  $g'(x) = 1 + \ln x$  da cui  $g'(x) \geq 0$  se  $x \geq e^{-1}$ ,  $g'(x) \leq 0$  se  $x \leq e^{-1}$  dunque  $g(e^{-1})$  è il valore minimo di  $g(x)$ . Ma si ha  $g(e^{-1}) = 3 - \frac{1}{e} > 2 - \frac{1}{2} > 0$ . Dunque  $g(x) > 0$  per ogni  $x$  e  $f'(x) < 0$  per ogni  $x$  nel dominio di  $f$ . Per i criteri di monotonia  $f$  è strettamente decrescente e quindi iniettiva se ristretta ad ognuno dei due intervalli su cui è definita. L'intervallo che contiene il punto  $x = 1$  è dunque  $I = (1/e, +\infty)$  e questo è il più grande possibile in quanto la funzione non è definita in  $1/e$ . Agli estremi di tale intervallo la funzione tende a  $+\infty$  e  $-\infty$  dunque per il teorema dei valori intermedi la funzione è anche surgettiva. Osserviamo che  $f(1) = 2$  e che  $f'(1) = -3$  dunque la funzione inversa  $f^{-1}(y)$  è derivabile per  $y = 2$  e si ha

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{3}.$$

□