ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 21 - 8.11.2021

FREQUENTE E DEFINITIVO

Diremo che una proprietà $P(x)$ vale <u>definitivamente</u> per $x \to x_0$ se esiste $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U \setminus \{x_0\}: P(x)$

Diremo che $P(x)$ vale <u>frequentemente</u> per $x \to x_0$ se $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}\ \exists x \in U \setminus \{x_0\}: P(x)$

tipicamente $n \to +\infty$

<u>Esempi</u>

$n^2 - 100n > 10$ definitivamente per $n \to +\infty$

<u>dim</u> $n > 1000 \implies 100 < \frac{n}{10} \qquad -100n > -\frac{n^2}{10}$

$$n^2 - 100n > n^2 - \frac{n^2}{10} = \frac{9}{10} n^2 \overset{?}{>} 10$$

$$9n^2 > 100$$

$$3n > 10 \quad \checkmark$$

Es

n è pari frequentemente per $n \to +\infty$

Es

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$\forall U \in \mathcal{U}_\ell$: $f(x) \in U$ definitivamente.

Oss non definitivamente $P(x)$ $\Leftrightarrow$ frequentemente non $P(x)$

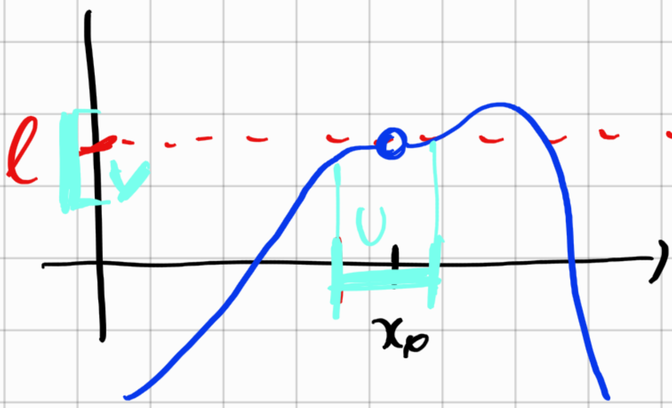
Teo (permanenza del segno)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{(<)}{>} 0$ $\quad (\ell \in (0, +\infty])$

Allora $f(x) > 0$ definitivamente

ovvero $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \overset{(<)}{>} 0.$$



$V > 0$

$\forall V \in \mathcal{U}_\ell \; \exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$:

$x \in U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$\Downarrow$

$f(x) > 0$

Contronominale:

Se $f(x) \geq 0 \quad \forall x$ e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Allora $\ell \geq 0$.

CRITERI DI CONFRONTO

1. Se $f(x) \leq g(x)$ se $\left.\begin{array}{l} f(x) \to \ell_1 \\ \text{e } g(x) \to \ell_2 \end{array}\right\}$ per $x \to x_0$

allora $\ell_1 \leq \ell_2$

dim $g(x) - f(x) \geq 0 \quad \forall x$.

$$\begin{array}{c} g(x) - f(x) \geq 0 \\ \downarrow \\ \ell_2 - \ell_1 \geq 0 \end{array}$$

permanenza del segno.

□

Es $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \geq \lim_{x \to +\infty} 0$.

2. Se $f(x) \leq g(x)$ e $f(x) \to +\infty$.

Allora $g(x) \to +\infty$

dim Se non fosse $g(x) \to +\infty$

$\exists U \in I_{+\infty}$: frequentemente: $g(x) \notin U$.

$\exists M > 0$: t.q. $g(x) \leq M$.

ma anche $f(x) \leq g(x) \leq M$.

ma $f(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) > M$ definitivamente.

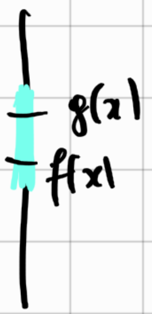
3. (teorema dei 2 carabinieri)

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \forall x.$$

Se $f(x) \to \ell$ e $g(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

Allora $h(x) \to \ell$.

dim $\forall U \in B_\ell$: $\underbrace{f(x) \in U \wedge g(x) \in U}$ def. per $x \to x_0$



$$\Downarrow$$

$$h(x) \in U.$$

$$\Rightarrow h(x) \to \ell.$$

Esercizio

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x}$$

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$$

$$0 \le \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x} < \frac{1}{x}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

2 carabinieri

Teorema Se $a_n \to \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$ (finito)

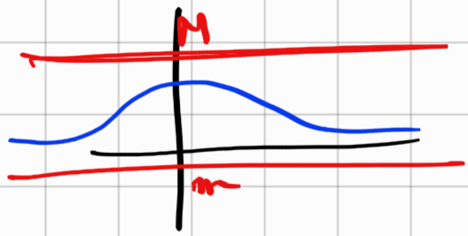
allora a_n è limitata.

def $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata se

$f(A)$ è limitato.

Cioè $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in A$

$$m \le f(x) \le M$$

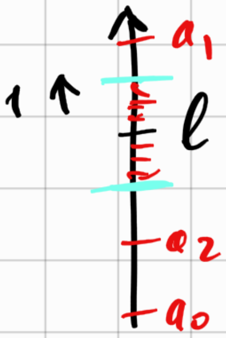


Cioè $\exists K \in \mathbb{R} :\quad |f(x)| \le K \quad \forall x \in A$

$$\boxed{K = \max\{M, -m\}}$$

dim (teo).

$a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

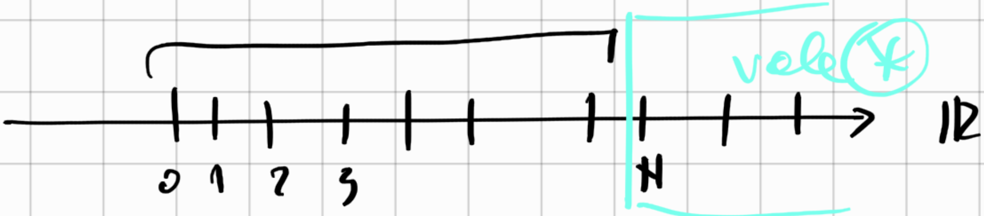


$\varepsilon = 1$

$\exists N : \forall n \geq N :$

$$|a_n - \ell| < 1$$

$$\ell - 1 < a_n < \ell + 1 \quad (*)$$



Prendo $M = \max\{\ell+1, a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$

$m = \min\{\ell-1, a_0, a_1 \dots a_{N-1}\}$

allora $\forall n \in \mathbb{N} : \quad m \leq a_n \leq M \quad \square$

Attenzione non è detto che una successione limitata abbia limite.

$a_n = (-1)^n \qquad -1 \leq a_n \leq 1$ è limitata

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ non esiste.

Nomenclatura $\qquad a_n$ successione.

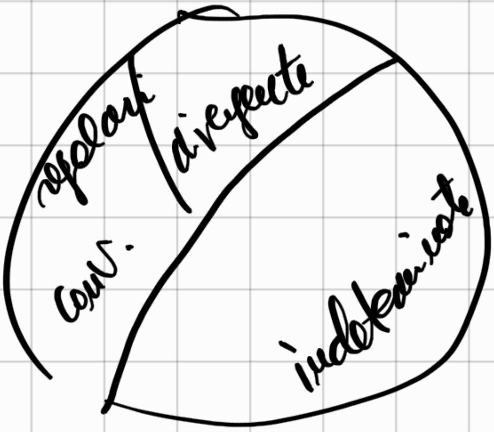
Se $a_n \to \ell \in [-\infty, +\infty]$ (per $n \to +\infty$)

Diremo che a_n è <u>regolare</u>

altrimenti a_n è <u>indeterminata</u>

Se $a_n \to l$ e $l \in \mathbb{R}$ (finito)

diremo che a_n <u>convergente</u>



Se $a_n \to l$ e $l \in \{+\infty, -\infty\}$

diremo che a_n <u>diverge</u>

Trovare il <u>carattere</u> di una succ. significa dire se è convergente, divergente o indeterminata.

<u>NUMERO</u> $e \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Devo <u>mostrare</u> che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente.

① a_n è <u>crescente</u> $n \geq m \Rightarrow a_n \geq a_m$

n	1	2	3
a_n	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{64}{27}$

2 2.25 2.37

Criterio di monotonia per le succ.

Se $a_{n+1} \geq a_n$ $(>)$ $\forall n$ $\Leftarrow\Rightarrow$ a_n è crescente (strett.)

$a_{n+1} \leq a_n$ $(<)$ $\forall n$ $\Leftarrow\Rightarrow$ a_n è decrescente (strett.)

$\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ x induzione

$m \leq n$

$a_m \leq a_{m+1} \leq a_{m+2} \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$.

Basta dimostrare $a_{n-1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \overset{?}{\leq} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$1 \overset{?}{\leq} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}_{} \cdot \frac{n}{n-1}$$

Disuguaglianza di Bernoulli

$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\forall x > -1 : (1+x)^n \geq 1+nx}_{P(n)}$

idea: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$= 1 + nx + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots}_{\text{positivo?}}$

dim per induzione

per $n=0$: $(1+x)^0 = 1$

$1 + 0 \cdot x = 1$. ok

$\overline{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

$P(n+1)$: $(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{P(n)}{\geq} (1+nx)\cdot(1+x)$$

$$= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\geq 1 + (n+1)x. \qquad \square$$

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}_{} \cdot \frac{n}{n-1} \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 - \frac{1}{n^2}\cdot n\right) \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1.$$

ok!

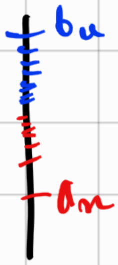
a_n ē crescente $\Rightarrow$ $a_n \longrightarrow \ell \in [2, +\infty]$

(2) a_n ē limitata?

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}^{a_n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \geq a_n$$

b_n ē decrescente? $\qquad a_n \leq b_n \leq b_1$

$b_n \leq b_{n-1}$



$$1 \overset{?}{\leq} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \frac{1}{\frac{n}{n-1}}$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n}$$

$$\geq \left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = 1. \quad \square$$

$$2.37 \leq a_3 \leq a_n \leq b_3 \leq 3.161$$

$$b_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \leq 3.161$$