

# Analisi Matematica

## Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

13 luglio 2021

1. Si consideri, al variare di  $\alpha > 0$  la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \left( e^{\frac{1}{n}} - \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n} + 2 \ln \left( \cos \frac{1}{n} \right) \right)^\alpha.$$

Dimostrare che, per  $n_0$  sufficientemente grande, la serie è ben definita. Studiarne poi la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

2. Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} t \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \cdot e^t dt.$$

3. Risolvere, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + 3x^2 u^4 = 0 \\ u(1) = \alpha. \end{cases}$$

Per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'intervallo massimale di esistenza è tutto  $\mathbb{R}$ ?