# Analisi Matematica
# Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

23 giugno 2021

1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{x+2} + x \sin x, \\ u(0) = \frac{3}{2} + 2\ln 2, \\ u'(0) = 2 + 3\ln 2 \end{cases}$$

e determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

*Soluzione.* Si tratta di una equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti della forma

$$P(D)[u] = D^2u - 2Du - u = f_1 + f_2$$

con $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, $f_1(x) = \frac{e^x}{x+2}$, $f_2(x) = x \sin x$.

L'equazione è definita per $x \neq 2$. Essendo una equazione lineare la soluzione massimale con dato iniziale in $x = 0$ è definita sul più grande intervallo contenente il dato iniziale e cioè sull'intervallo $(-2, +\infty)$.

Il polinomio $P$ ha una unica radice $\lambda = 1$ con molteplicità $m = 2$ dunque le soluzioni dell'equazione omogenea $P(D)[u] = 0$ sono della forma

$$u(x) = ae^x + bxe^x.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $P(D)[u] = f_1$ si può determinare con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Posto $u_1(x) = a(x)e^x + b(x)xe^x$ basterà determinare $a(x)$ e $b(x)$ tali che

$$\begin{cases} a'e^x + b'xe^x = 0, \\ a'e^x + b'(x+1)e^x = f_1(x) \end{cases}$$

da cui $a' = -xb'$ e

$$-xb'e^x + b'(x+1)e^x = \frac{e^x}{x+2}$$

cioè

$$\begin{cases} b'(x) = \frac{1}{x+2} \\ a'(x) = -\frac{x}{x+2} = -1 + \frac{2}{x+2} \end{cases}$$

da cui integrando (e ricordando che $x > -2$ sull'intervallo massimale di esistenza)

$$b(x) = \ln(x+2), \qquad a(x) = -x + 2\ln(x+2).$$

Dunque una soluzione particolare di $P(D)[u] = f_1$ è

$$u_1 = (-x + 2\ln(x+2))e^x + \ln(x+2)xe^x = (-x + (x+2)\ln(x+2))e^x.$$

Visto che $-xe^x$ è soluzione dell'omogenea, una soluzione particolare più semplice è

$$u_{1'} = (x+2)\ln(x+2)e^x.$$

Per quanto riguarda l'equazione non omogenea $P(D)[u] = x\sin x$ possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma

$$u_2(x) = (ax+b)\sin x + (cx+d)\cos x.$$

Si avrà

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= (a-cx-d)\sin x + (ax+b+c)\cos x \\ u_2''(x) &= (-2c-ax-b)\sin x + (2a-cx-d)\cos x. \end{aligned}$$

Inserendo nell'equazione $P(D)[u] = x\sin x$ si ottiene

$$\begin{aligned} &(-\,2c-ax-b-2a+2cx+2d+ax+b)\sin x \\ &+(2a-cx-d-2ax-2b-2c+cx+d)\cos x = x\sin x \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} -2c-b-2a+2d+b = -2c-2a+2d \stackrel{!}{=} 0, \\ (-a+2c+a)x = 2cx \stackrel{!}{=} x, \\ 2a-d-2b-2c+d = 2a-2b-2c \stackrel{!}{=} 0, \\ (-c-2a+c)x = -2ax \stackrel{!}{=} 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \frac{1}{2}, \\ a = 0, \\ d = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque una soluzione particolare di $P(D)[u] = f_2$ è

$$-\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}(x+1)\cos x.$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea è dunque della forma

$$u(x) = (a+bx)e^x + (x+2)\ln(x+2)e^x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}(x+1)\cos x.$$

Ponendo

$$u(0) = a + 2\ln 2 + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} \frac{3}{2} + 2\ln 2$$

si ottiene $a = 1$. Inoltre derivando $u(x)$ e ponendo $x = 0$ si ottiene

$$u'(0) = b + a + \ln 2 + 1 + 2\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = b + 2 + 3\ln 2 \stackrel{!}{=} 2 + 3\ln 2$$

da cui $b = 0$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(x) = e^x + (x+2)\ln(x+2)e^x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}(x+1)\cos x.$$

□

2. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\cdot|\sin(x)|\,dx.$$

*Soluzione.* L'integrale esiste in quanto la funzione integranda è continua e positiva. Per simmetria si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, |\sin x| \; dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \, |\sin x| \; dx.$$

Possiamo spezzare l'integrale sugli intervalli in cui il segno di $\sin x$ è costante:

$$= 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx.$$

Troviamo una primitiva integrando per parti

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx$$

da cui

$$2 \int e^{-x} \sin x = -e^{-x} (\sin x + \cos x).$$

Dunque il nostro integrale iniziale è

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[ -e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[ -e^{-(k+1)\pi} (-1)^{k+1} + e^{-k\pi} (-1)^k \right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\pi} \left[ -e^{-\pi} (-1) + 1 \right] \\
&= (1 + e^{-\pi}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\pi})^k = \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\
&= \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}.
\end{aligned}$$

□

3. Per quali valori di $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\gamma \geq 0$ converge la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{\alpha} \cdot \left( e - e^{\cos \frac{1}{n}} \right)}{e^{\frac{\gamma}{n}} \cdot (\ln n)^{\beta}}.$$

*Soluzione.* Si tratta di una serie a termini $a_n$ positivi, andremo a studiare l'andamento asintotico di $a_n$ per $n \to +\infty$. Ricordando che, per $x \to 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad e^x = 1 + x + o(x)$$

si ha, per $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
e - e^{\cos \frac{1}{n}} &= e \left( 1 - e^{\cos \frac{1}{n} - 1} \right) = e \left( 1 - e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right) = e \left( \frac{1}{2n^2} + o\left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \\
&\sim \frac{e}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Chiaramente $e^{\frac{\gamma}{n}} \sim 1$ per $n \to +\infty$ (indipendentemente da $\gamma$). Dunque abbiamo:

$$a_n \sim \frac{en^\alpha}{2n^2 \ln^\beta n} = \frac{e}{2n^{2-\alpha} \ln^\beta n}.$$

Se $\alpha < 1$ si ha $a_n \ll \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ (in quanto $\ln n \gg 1$) e dunque la serie è convergente per confronto con la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^p}$ con $p = 2 - \alpha > 1$. Se $\alpha > 1$ si ha $a_n \gg \frac{1}{n}$ in quanto $\ln^\beta n \ll n^{\alpha-1}$ dunque la serie diverge per confronto con la serie armonica. Se $\alpha = 1$ si ha $a_n \sim \frac{e}{2n \ln^\beta n}$. In questo caso si può utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy o il criterio di confronto integrale, per trovare che la serie

$$\sum_n \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

converge se e solo se $\beta > 1$. $\square$