Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

24 giugno 2020

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$
Determinare
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$
Dimostrare che esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|.$$
Si consideri la successione a_n definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{1+e^{a_n}}, \\ a_1 = 2020. \end{cases}$$
La successione a_n è convergente?

Soluzione. Si ha
$$g(x) = |f'(x)| = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$
Questa funzione è positiva e tende a zero sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Dunque la funzione ha massimo e nel punto di massimo la derivata si annulla. La derivata è
$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = e^x \frac{e^x(1+e^x) - 2e^x}{(1+e^x)^3} = e^{2x} \frac{e^x - 1}{(1+e^x)}$$
e si annulla solo per $x = 0$. Dunque l'estremo superiore cercato è $g(0) = \frac{1}{4}$.

Per il teorema di Lagrange sappiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ esiste un punto $c \in \mathbb{R}$ per cui si ha
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$
dunque, per quanto visto sopra
$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \le \frac{1}{4} |x - y|.$$
Questo è quanto si doveva dimostrare, avendo scelto $L = \frac{1}{4}$.

In particolare f è una contrazione. Il teorema di Banach-Caccioppoli ci dice che f ammette un unico punto fisso che può essere ottenuto (si riguardi la dimostrazione) come limite della successione a_n data dall'esercizio, qualunque sia il dato iniziale a_0. □

2. Si consideri l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot |\sin x|^\beta}{x^\alpha}\, dx.$$

Per quali valori di $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ l'integrale converge?

Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx.$$

Soluzione. Si tratta di un integrale improprio per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. La funzione integranda è positiva dunque l'integrale esiste. Per $x \to 0^+$ la funzione integranda è asintotica a

$$\frac{x \cdot x^\beta}{x^\alpha} = x^{1+\beta-\alpha}$$

dunque l'integrale dato converge, in un intorno destro di $x = 0$ se e solo se converge l'integrale $\int_0^1 x^{1+\beta-\alpha}$. Notoriamente questo integrale converge se e solo se $1 + \beta - \alpha > -1$ cioè se $\alpha < \beta + 2$.

Per $x \to +\infty$ osserviamo che la funzione integranda $f(x)$ può essere stimata dall'alto

$$f(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^\alpha}$$

e l'integrale in un intorno di $+\infty$ di quest'ultima funzione converge se $\alpha > 1$.

In conclusione se $1 < \alpha < \beta + 2$ l'integrale dato converge. Se $\alpha \geq \beta + 2$ abbiamo già detto che l'integrale diverge in un intorno destro di $x = 0$. Per concludere l'esercizio dobbiamo solo verificare che per $\alpha \leq 1$ l'integrale diverge in un intorno di $+\infty$.

Per fare ciò possiamo considerare l'integrale su un intervallo di periodicità della funzione $|\sin x|$ e stimarlo dal basso:

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\operatorname{arctg} x\, |\sin x|^\beta}{x^\alpha}\, dx &\geq \frac{\operatorname{arctg} k\pi}{(k\pi+\pi)^\alpha} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x|^\beta\, dx \\ &= \frac{\operatorname{arctg} k\pi}{(k\pi+\pi)^\alpha} \int_0^\pi \sin^\beta x\, dx.\end{aligned}$$

Posto $C = \int_0^\pi \sin^\beta x\, dx$ si ha $C > 0$ e

$$\begin{aligned}\int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\, |\sin x|^\beta}{x^\alpha}\, dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{arctg}\, |\sin x|^\beta}{x^\alpha}\, dx \\ &\geq C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\,(k\pi)}{(k\pi+\pi)^\alpha}\end{aligned}$$

ma sappiamo che per $k \to +\infty$ si ha

$$\frac{\operatorname{arctg}\,(k\pi)}{(k\pi+\pi)^\alpha} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi^\alpha k^\alpha}$$

e la serie $\sum_k \frac{1}{k^\alpha}$ è divergente se $\alpha \leq 1$. $\square$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - 6u' + 9u = \sin(3x) + e^{3x} + \frac{e^{3x}}{1+x^2}$$

Dimostrazione. Soluzione Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti. Il polinomio associato è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono dunque della forma

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.

Per trovare una soluzione particolare della non omogenea possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione e trovare separatamente le soluzioni particolari per ognuno dei tre addendi.

Per il termine noto $\sin(3x)$ possiamo utilizzare il metodo di similarità e cercare una soluzione particolare della forma

$$u_1(x) = a \sin(3x) + b \cos(3x)$$

($3i$ non è una radice del polinomio associato). Sostituendo nell'equazione

$$u'' - 6u' + 9u = \sin(3x)$$

si trova $a = 0$ e $b = \frac{1}{19}$ da cui

$$u_1(x) = \frac{\cos(3x)}{18}.$$

Per il termine noto e^{3x} essendo 3 una radice doppia del polinomio associato dobbiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$u_2(x) = cx^2 e^{3x}.$$

Sostituendo nell'equazione

$$u'' - 6u' + 9u = e^{3x}$$

si trova $c = \frac{1}{2}$ e dunque

$$u_2(x) = \frac{x^2}{2} e^{3x}.$$

Per il termine noto

$$\frac{e^{3x}}{1+x^2}$$

dobbiamo utilizzare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u_3(x) = c_1(x) e^{3x} + c_2(x) x e^{3x}.$$

Se imponiamo $c_1' e^{3x} + c_2' x e^{3x} = 0$ si ha

$$u_3'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3x c_2 e^{3x}$$

e se imponiamo

$$3c_1' e^{3x} + c_2' e^{3x} + 3x c_2' e^{3x} = \frac{e^{3x}}{1+x^2}$$

risulterà

$$u_3'' - 6u_3' + 9u_3 = \frac{e^{3x}}{1+x^2}.$$

Dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1' + c_2' x = 0 \\ 3c_1' + (1+3x)c_2' = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Si trova

$$\begin{cases} c_2' = \frac{1}{1+x^2} \\ c_1' = -\frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

da cui si può scegliere

$$\begin{cases} c_2 = \operatorname{arctg} x \\ c_1 = -\frac{\ln(1+x^2)}{2}. \end{cases}$$

Dunque

$$u_3 = -\frac{\ln(1+x^2)}{2} e^{3x} + x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot e^{3x}.$$

In conclusione tutte le soluzioni dell'equazione data sono della forma:

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{\cos(3x)}{18} + \frac{x^2}{2} e^{3x} - \frac{\ln(1+x^2)}{2} e^{3x} + x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot e^{3x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. $\square$