Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

3 giugno 2020

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$(u'(x) - 1) \cdot (\cos x - 1) = u(x) \sin x.$$

Determinare la soluzione u che soddisfa la condizione $u(\pi) = \pi$ e scriverne l'intervallo massimale di esistenza. Trovare una soluzione u definita su tutto l'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$.

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine in forma non normale. In effetti l'equazione è già moltiplicata per un fattore integrante e può essere scritta come derivata di un prodotto. Dividendo per il coefficiente di u' l'equazione può essere portata in forma normale e dunque nei punti in cui tale coefficiente non si annulla c'è esistenza e unicità della soluzione. Nei punti in cui il coefficiente di u' si annulla ci possiamo invece aspettare che ci possano essere più soluzioni con lo stesso dato iniziale o anche nessuna soluzione.

Possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$u'(x)(\cos x - 1) - u(x) \sin x = \cos x - 1$$

ovvero,

$$(u(x) \cdot (\cos x - 1))' = \cos x - 1 = (\sin x - x)'$$

da cui, su ogni intervallo in cui $\cos x \neq 1$ deve valere:

$$u(x) = \frac{\sin x - x + c}{\cos x - 1}.$$

Se imponiamo la condizione $u(\pi) = \pi$ otteniamo $c = -\pi$ e

$$u(x) = \frac{\sin x - x - \pi}{\cos x - 1}.$$

Questa soluzione è definita sull'intervallo $(0, 2\pi)$ che è massimale in quanto agli estremi di tale intervallo la soluzione tende a infinito e dunque non può essere estesa. Se vogliamo una soluzione dell'equazione che possa essere estesa ulteriormente dobbiamo scegliere una costante c in modo che il numeratore tenda a zero, come il denominatore, quando $x \to 0$. Questo si ottiene scegliendo $c = 0$. Osserviamo infatti che in tal caso si ha, per $x \to 0$

$$u(x) = \frac{\sin x - x}{\cos x - 1} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{\frac{x}{6} + o(x)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{x}{3} + o(x).$$

Dunque ponendo $u(0) = 0$ si ottiene una funzione continua e derivabile in $x = 0$. Tale funzione risulta essere definita su tutto l'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{\cos x - 1} & \text{se } x \in (-2\pi, 2\pi),\ x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e, per continuità, è certamente soluzione dell'equazione differenziale. □

2. Si consideri, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{e} + 2n^2 \ln \cos \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} + \beta \tan \frac{1}{n^2} \right) \cdot n^\alpha \cdot \sin n$$

Dimostrare che per $x \to 0$ si ha:

$$e^x + 2\frac{\ln \cos x}{x^2} - \sin x + \beta \tan x^2 = \frac{x^2}{3} + \beta x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Per quali valori di α, β il limite esiste? Quanto vale quando esiste?

Soluzione. Ricordiamo gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \tan t &= t + O(t^3) \Rightarrow \tan x^2 = x^2 + o(x^3) \\ \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+O(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+O(x^6) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x + 2\frac{\ln\cos x}{x^2} - \sin x + \beta\tan x^2 \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1-\frac{x^2}{6}-x+\frac{x^3}{6}+\beta x^2+o(x^3) \\
&= \frac{x^2}{3}+\beta x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).
\end{aligned}$$

Dunque per $n\to+\infty$ si ha

$$f\left(\frac{1}{n}\right)n^\alpha\sin n = \left(\left(\frac{1}{3}+\beta\right)n^{\alpha-2}+\frac{n^{\alpha-3}}{3}+o(n^{\alpha-3})\right)\sin n.$$

Se $\beta=-\frac{1}{3}$ si ha

$$\dots = n^{\alpha-3}\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)\sin n.$$

Se $\alpha\geq 3$ se ha $n^{\alpha-3}\geq 1$ e il limite non esiste in quanto il seno assume frequentemente valori maggiori di $\frac{1}{2}$ e minori di $-\frac{1}{2}$ e dunque la successione assume frequentemente valori maggiori di $\frac{1}{6}$ e minori di $-\frac{1}{6}$. Se invece $\alpha<3$ il seno è una successione limitata moltiplicata per una successione infinitesima e dunque il limite è zero.

Se $\beta\neq\frac{1}{3}$ si ha

$$\dots = n^{\alpha-2}\left(\left(\frac{1}{3}+\beta\right)+o(1)\right)\sin n.$$

Si svolge lo stesso ragionamento del caso precedente per dedurre che se $\alpha\geq 2$ il limite non esiste se invece $\alpha<2$ il limite è zero.

□

3. Al variare del parametro $\alpha>0$ si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|^\alpha}{\exp\cos x-\exp\left(\cos x-\frac{1}{x}\right)}\,dx$$

Per quali α l'integrale è convergente?

Soluzione. Poniamo
$$f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|^{\alpha}}{e^{\cos x} - e^{\cos x - \frac{1}{x}}}.$$
Osserviamo innanzitutto che
$$e^{\cos x} - e^{\cos x - \frac{1}{x}} = e^{\cos x}\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)$$
ed essendo $\frac{1}{e} \leq e^{\cos x} \leq e$ si ha
$$\lim_{x\to 0^+} 1 - e^{-\frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1.$$
Allora per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $b < +\infty$ l'integrale $\int_0^b f$ esiste finito: studiamo l'integrabilità $\int_1^{+\infty} f$. Osserviamo che per $x \geq 1$ $\sin\frac{1}{x} > 0$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right|^{\alpha} = \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$.
In conclusione si ha, per $x \geq 1$
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{e^{\cos x} - e^{\cos x - \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{e^{\cos x}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1 - e^{-\frac{1}{x}}} \\ &= I \cdot II \cdot III \cdot IV. \end{aligned}$$
Come già visto per $x \to +\infty$ si h $I \to 1$, $IV \to 1$ e $\frac{1}{e} \leq II \leq e$,
$$\int_1^{+\infty} III < +\infty \iff \alpha > 1.$$
$\square$