

# Analisi Matematica

## Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

29 aprile 2020

1. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$u'' + 2u' + u = \frac{\ln x}{e^x}$$

*Soluzione.* Polinomio associato

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

soluzioni dell'equazione omogenea

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Cerchiamo una soluzione della non-omogenea della forma:

$$c_1(x) e^{-x} + c_2(x) x e^{-x}$$

con il metodo della variazione delle costanti:

$$\begin{aligned} c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} &= 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2'(1-x) e^{-x} &= \ln x e^{-x} \end{aligned}$$

da cui

$$c_2' = \ln x, \quad c_1' = -x \ln x$$

quindi possiamo scegliere

$$\begin{aligned} c_2(x) &= x \ln x - x, \\ c_1(x) &= -\int \ln x \, dx = -\left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \right] \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Ogni soluzione dell'equazione non omogenea si scrive quindi nella forma

$$\begin{aligned} & a e^{-x} + b x e^{-x} + \left( -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) e^{-x} + (x \ln x - x) e^{-x} \\ &= \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2 + a + b x \right) e^{-x} \end{aligned}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

□

2. Trovare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2(x+1)\sqrt[3]{u^2} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Scrivere le soluzioni di classe  $C^\infty$ . Ci sono altre soluzioni? (nel caso descriverle brevemente).

(più difficile) Determinare l'insieme

$$\{u(-2) : u \text{ soluzione del problema di Cauchy}\}.$$

*Soluzione.* Una soluzione di classe  $C^\infty$  è la soluzione stazionaria  $u(x) = 0$ . Ma visto che le ipotesi di Cauchy-Lipschitz non sono soddisfatte in un intorno dei punti della retta  $u = 0$  non possiamo escludere che ci siano altre soluzioni che assumono valori diversi da zero. Dove  $u$  è diversa da zero possiamo dividere ambo i membri dell'equazione per  $\sqrt[3]{u^2}$  per separare le variabili:

$$u' u^{-\frac{2}{3}} = 2(x+1)$$

da cui, integrando,

$$3\sqrt[3]{u(x)} = x^2 + 2x + c$$

ovvero

$$u(x) = \left( \frac{x^2 + 2x + c}{3} \right)^3. \quad (1)$$

Se imponiamo  $u(1) = 0$  otteniamo  $c = -3$  da cui si trova una seconda soluzione di classe  $C^\infty$ :

$$u(x) = \left( \frac{x^2 + 2x - 3}{3} \right)^3.$$

Scegliendo altri valori della costante  $c$  è però possibile incollare le soluzioni appena trovate con la soluzione stazionaria. La funzione (1) può essere negativa in un intorno simmetrico del punto  $x = -1$  (infatti  $x^2 + 2x + c$  ha come grafico una parabola di asse  $x = -1$ ). Invece tale funzione è positiva su due semirette intorno di  $-\infty$  e  $+\infty$ . Affinché la soluzione si annulli per  $x = 1$  la parte negativa della soluzione (se c'è) deve annullarsi negli estremi di un intervallo  $[-1 - a, -1 + a]$  con  $-1 + a \leq 1$ . Invece la parte positiva deve annullarsi nell'estremo sinistro di un intervallo  $[b, +\infty)$  con  $1 \leq b \leq +\infty$  e sull'estremo destro di un intervallo  $(-\infty, d]$  con  $-\infty \leq d \leq -1 - a$ . Dunque tutte le soluzioni del problema di Cauchy possono essere scritte nella forma

$$u(x) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 + 2x - d^2 - 2d}{3} \right)^3 & \text{per } x < d \\ 0 & \text{per } d \leq x \leq -1 - a \\ \left( \frac{x^2 + 2x - (a-1)^2 - 2(a-1)}{3} \right)^3 & \text{per } -1 - a < x < -1 + a \\ 0 & \text{per } -1 + a \leq x \leq b \\ \left( \frac{x^2 + 2x - b^2 - 2b}{3} \right)^3 & \text{per } x > b \end{cases}$$

con  $a \leq 2$ ,  $1 \leq b \leq +\infty$ ,  $-\infty \leq d \leq -1 - a$ . Il valore minimo che può assumere la funzione nel punto  $x = -2$  è quello che si ottiene quando  $-2 \in [-1 - a, -1 + a]$  con  $a$  più grande possibile cioè  $a = 2$ . In tal caso si ottiene

$$u(-2) = \left[ \left( \frac{x^2 + 2x - 3}{3} \right)^3 \right]_{x=-2} = -1.$$

Il valore massimo si ottiene invece quando  $-2 \in (-\infty, d]$  con  $d$  più grande possibile, ovvero  $a = 0$ ,  $d = -1 - a = -1$ . In tal caso si ottiene

$$u(-2) = \left[ \left( \frac{x^2 + 2x + 1}{3} \right)^3 \right]_{x=-2} = \frac{1}{27}.$$

Tutti i valori intermedi possono essere ottenuti scegliendo i parametri intermedi dunque

$$\{u(-2): u \text{ soluzione del pb. di Cauchy}\} = \left[ -1, \frac{1}{27} \right].$$

□

3. Studiare, al variare del parametro  $p > 0$ , la convergenza semplice e la convergenza assoluta dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x) \cdot \ln x}{x^p} dx.$$

Per quali  $p > 0$  c'è convergenza assoluta? Per quali  $p > 0$  c'è convergenza semplice ma non assoluta?

(Facoltativo) Cosa succede per  $p \leq 0$ ?

*Soluzione.* L'integrale può presentare problemi solamente per  $x \rightarrow 0^+$  e per  $x \rightarrow +\infty$  in quanto la funzione integranda è definita e continua su tutto l'intervallo aperto  $(0, +\infty)$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$\frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} \sim -\pi \frac{\ln x}{x^{p-1}}$$

e sappiamo (per verifica diretta) che quest'ultima funzione ha integrale finito in un intorno di 0 se e solo se  $p-1 < 1$  cioè  $p < 2$ . Dunque sull'intervallo  $(0, 1]$  la funzione è integrabile (semplicemente e assolutamente) se e solo se  $p < 2$ .

Per  $p \rightarrow +\infty$  la funzione cambia segno frequentemente. Per quanto riguarda la convergenza assoluta osserviamo che per  $x > 1$  risulta

$$\left| \frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} \right| \leq \frac{\ln x}{x^p}$$

e sappiamo (per verifica diretta) che quest'ultima funzione ha integrale convergente in un intorno di  $+\infty$  se e solo se  $p > 1$ . Dunque per  $p > 1$  abbiamo convergenza assoluta in un intorno di  $+\infty$ . (e quindi anche semplicemente). Per la convergenza semplice, in analogia con il criterio di Dirichlet per le serie, possiamo provare ad integrare per parti: (se  $p > 0$ )

$$\int_a^{+\infty} \sin(\pi x) \frac{\ln x}{x^p} dx = \left[ -\cos(\pi x) \frac{\ln x}{x^p} \right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} (-\cos(\pi x)) \frac{1-p \ln x}{x^{p+1}} dx$$

Ora osserviamo che se  $p > 0$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos(\pi x) \ln x}{x^p} = 0$$

mentre per l'integrale osserviamo che si ha ora convergenza assoluta in quanto

$$\left| -\cos(\pi x) \frac{1-p \ln x}{x^{p+1}} \right| \leq \frac{p \ln x - 1}{x^{p+1}} \leq p \frac{\ln x}{x^{p+1}}$$

che notoriamente in un intorno di  $+\infty$  ha integrale convergente se  $p + 1 > 1$  cioè se  $p > 0$ .

Dunque tornando all'integrale sull'intero intervallo  $(0, +\infty)$  abbiamo mostrato che per  $p > 0$  si ha convergenza semplice e per  $1 < p < 2$  si ha convergenza assoluta.

Per dimostrare che per  $0 < p \leq 1$  non si ha convergenza assoluta basta verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{|\sin(\pi x)| \ln x}{x^p} dx = +\infty.$$

Ma osserviamo che

$$\int_1^n \frac{|\sin \pi x| \ln x}{x^p} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi x| \ln x}{x^p} dx$$

e, d'altra parte,

$$\int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi x| \ln x}{x^p} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{|\sin \pi x| \ln(k)}{(k+1)^p} dx = \frac{\ln k}{(k+1)^p} \int_0^1 \sin(\pi x) dx$$

e noi sappiamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{(k+1)^p} = +\infty$$

diverge se  $0 < p \leq 1$ . Dunque anche il nostro integrale è assolutamente divergente se  $0 < p \leq 1$ .

Se  $p \leq 0$  osserviamo che la funzione integranda non è infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$ . Questo è un indizio, ma non una prova, che l'integrale in tal caso non sia convergente. Per dimostrarlo procediamo in maniera simile a quanto fatto in precedenza. Osserviamo che posto

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin(\pi x) \ln x}{x^p} dx$$

se fosse  $F(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow +\infty$  allora si dovrebbe certamente avere

$$|F(k+1) - F(k)| \rightarrow |\ell - \ell| = 0, \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Ma la funzione  $\sin(\pi x)$  ha segno costante su  $[k, k+1]$  dunque per  $p \leq 0$  si ha

$$\begin{aligned} |F(k+1) - F(k)| &= \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)| \frac{\ln x}{x^p} dx \\ &\geq \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)| \frac{\ln(k)}{(k+1)^p} dx \\ &= \frac{\ln k}{(k+1)^p} \int_0^1 \sin(\pi x) dx \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ne consegue che l'integrale non può convergere, neanche semplicemente, se  $p \leq 0$ .

□