Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

23 marzo 2018

1. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} \int_{x-\sin x}^{x+\sin x} (\cos t) \ln(1+t)\, dt.$$

Soluzione. Osserviamo che se f è una funzione di classe C^0 e se $f(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$ allora
$$\int_0^x f(t)\, dt = o(x^{n+1})$$
in quanto si può applicare il teorema di De l'Hospital e il teorema fondamentale del calcolo integrale per ottenere
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{x^{n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{(n+1)x^n} = 0.$$
Dunque, sviluppando le funzioni coinvolte con la formula di Taylor, si ottiene:
$$\begin{aligned}
\int_{x-\sin x}^{x+\sin x} \cos t \ln(1+t)\, dt &= \int_{o(x)}^{2x+o(x)} (1+o(t))(t+o(t))\, dt \\
&= \int_{o(x)}^{2x+o(x)} (t+o(t))\, dt \\
&= \left(\frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)_{o(x)}^{2x+o(x)} \\
&= \frac{(2x+o(x))^2}{2} + o(x^2) = 2x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$
e l'integrale richiesto si riduce a
$$\frac{2x^2+o(x^2)}{1-\cos x} = \frac{2x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \to 4.$$
□

2. (a) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^\pi \cos^4 x\,dx, \qquad \int_0^\pi \cos^3 x\,dx.$$

(b) Dire se convergono i seguenti integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \cos^4 x\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos^3 x\,dx$$

Svolgimento. Integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^4 x\,dx &= \left[\sin x\cos^3 x\right]_0^\pi + 3\int_0^\pi \sin^2 x\cos^2 x\,dx \\ &= 0 + 3\int_0^\pi (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,dx \\ &= 3\int_0^\pi \cos^2 x\,dx - 3\int_0^\pi \cos^4 x\,dx\end{aligned}$$

da cui (portando a lato sinistro il secondo integrale sul lato destro)

$$\int_0^\pi \cos^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\pi \cos^2 x\,dx.$$

Osserviamo ora che $\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx$ (geometricamente chiaro, si dimostra analiticamente con la sostituzione $y = \pi/2 - x$ osservando che la funzione $\cos^2$ ha periodo π). Dunque

$$\int_0^\pi \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}\int_0^\pi \left[\cos^2 x + \sin^2 x\right]dx = \frac{3}{8}\pi.$$

Per il secondo integrale si possono sfruttare le simmetrie della funzione cos per ottenere:

$$\int_0^\pi \cos^3 x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = 0$$

Per quanto riguarda $\int_0^{+\infty} \cos^4(x)\,dx$ osserviamo che la funzione integranda è continua e non negativa, dunque l'integrale improprio esiste. Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos^4 x\,dx &= \lim_{k\to+\infty}\int_0^{k\pi} \cos^4(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to+\infty} k\int_0^{\pi} \cos^4(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\frac{3k\pi}{8} = +\infty.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'integrale improprio di $\cos^3 x$ è facile osservare che

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \cos^3 x \, dx = 0$$

e dunque

$$\int_0^{2k\pi} \cos^3 x \, dx = 0.$$

Ma osserviamo che $\cos^3 x > 0$ per $x \in [0, \pi/2)$ e quindi

$$\int_0^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = I > 0.$$

Dunque il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \cos^3 x \, dx$$

non esiste in quanto sulla successione $2k\pi$ il limite è zero ma sulla successione $2k\pi + \pi/2$ il limite è $I > 0$. Significa che l'integrale improprio non converge. $\square$

3. Posto

$$F(x) = \int_1^{e^x} \ln |\ln t| \, dt$$

(a) verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'integrale converge, dunque $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita (si intende, ovviamente, $F(0) = 0$).

(b) La funzione F è di classe C^1?

(c) Dire se la funzione ha asintoti orizzontali per $x \to +\infty$ e/o per $x \to -\infty$.

(d) Chiamata $\mathrm{Ei}(x)$ una primitiva della funzione e^x/x si scriva esplicitamente (utilizzando la funzione Ei) una primitiva della funzione $f(x) = \ln |\ln x|$.

Soluzione. La funzione

$$f(x) = \ln |\ln x|$$

è definita se $|\ln x| \neq 0$ ovvero per $x \neq 1$. Per $x \to 1$ si ha $f(x) \to -\infty$. Dunque l'integrale che definisce $F(x)$ è un integrale improprio nell'estremo 1. Osserviamo però che per $x \to 1$ si ha

$$|\ln |\ln x|| = |\ln |\ln 1 + (x-1)|| = |\ln |(x-1) + o(x-1)|| \ll \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

in quanto il logaritmo tende a $-\infty$ più lentamente dell'inverso di qualunque potenza. Ma allora l'integrale che definisce F è convergente e la funzione $F(x)$ è ben definita per ogni x.

Se $x > 0$ si può scrivere:

$$F(x) = \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^{e^x} f(t)\,dt$$

da cui risulta chiaro che possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale (in quanto f è continua sull'intervallo $[2, e^x]$) per ottenere che F è derivabile e

$$F'(x) = f(e^x)e^x = \ln|x|e^x.$$

Lo stesso si può fare se $x < 0$ e si ottiene la stessa espressione algebrica per $F'(x)$. Per $x \to 0$ la funzione $F(x)$ tende a zero in quanto se l'integrale converge allora l'integrale deve tendere a zero quando la lunghezza dell'intervallo di integrazione tende a zero. Per definizione $F(0) = 0$ dunque la funzione F risulta essere continua. Ma non potrà essere derivabile in $x = 0$ in quanto:

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0} \ln|x|e^x = -\infty$$

e se F fosse derivabile in 0 tale limite, visto che esiste, dovrebbe essere uguale a $F'(0)$. Dunque F non è di classe C^1.

Per quanto riguarda gli asintoti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Visto che $f(t) \to +\infty$ per $t \to +\infty$ e $F(t) \geq 0$ per $t \geq e$ si avrà quindi anche $F(t) \to +\infty$. Invece

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \int_1^0 f(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)\,dt$$

e questo integrale converge nell'estremo 0 in quanto per $t \to 0$ si ha

$$f(t) = \ln|\ln t| = \ln(-\ln t) = \ln\ln\frac{1}{t} \ll \ln\frac{1}{t} \ll \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Significa che la funzione $F(x)$ ha un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

Facendo il cambio di variabili $x = e^t$, $dx = e^t dt$ e poi integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \ln|\ln x|\,dx = \int \ln|t|e^t\,dt = e^t\ln|t| - \int \frac{e^t}{t}\,dt \\ &= e^t\ln|t| - \mathrm{Ei}(t) = x\ln|\ln x| - \mathrm{Ei}(\ln x).\end{aligned}$$

□