

Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

APPELLO N. 3 – PROVA SCRITTA (21 Marzo 2016)

**Importante:** Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Dato l'insieme

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = n^3 e^{-n^2}, n \in \mathbb{N}\},$$

si chiede di

- 1a) determinare  $\inf A$  e  $\sup A$ , precisando se essi coincidono rispettivamente con  $\min A$  e  $\max A$  (con  $\mathbb{N}$  indichiamo l'insieme dei numeri interi *positivi*);
- 1b) dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + a_2 + C,$$

$$\text{dove } C = \int_2^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

2. Data

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x < 1,$$

provare che esiste un punto  $\bar{P} = (\bar{x}, f(\bar{x}))$  sul grafico  $G_f$  di  $f$  a distanza minima dall'origine  $(0, 0)$ . Provare inoltre che tale punto è unico e che si ha  $-\frac{1}{2} < \bar{x} < -\frac{1}{4}$ .

3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log \sqrt{1+x} - \sqrt{x \log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x}.$$

4. Si consideri la funzione  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I = (-1, +\infty)$ , definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Dimostrare che  $F$  è iniettiva. Dire se l'insieme immagine  $F(I)$  è un intervallo, se è aperto/chiuso, se è limitato/illimitato. Dimostrare che per ogni  $x \in I$  si ha  $F(x) \leq x$ .