Analisi Matematica I
Prova scritta n. 6

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014-2015

22 febbraio 2016

1. Per ogni valore del parametro reale $\alpha \geq 0$ studiare la successione definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{5a_n + 4}{4a_n + 5} \end{cases} .$$
Nel caso in cui ($\alpha > 1$ e) $\alpha = \frac{k+1}{k}$ per qualche intero positivo k, verificare che esiste una successione crescente di interi $k_n \to +\infty$ tale che
$$a_n = \frac{k_n + 1}{k_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Dimostrare che per ogni $x > 0$ risulta
$$\frac{x^2}{2} \geq e \log x \,.$$

3. Calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{(2015^x - 2014^x)^2}{(1 + x^2)^{2015} - (1 + x^2)^{2014}}$$

4. Sapendo che
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
calcolare
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx.$$