

Analisi Matematica I – CdL Fisica e Astrofisica
Quinto appello - 14 Luglio 2014

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$x \log x = 1.$$

- (i) Dimostrare che esiste almeno un numero $x \in [1, 2]$ che risolve l'equazione.
- (ii) Dimostrare che esiste un unico $x > 0$ che risolve l'equazione.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_{-1}^1 |x| \sin x \, dx.$$

Esercizio 3. Data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 3|a_n - 1|. \end{cases}$$

Dimostrare che

- 1. $a_n \geq 3$ per ogni $n \geq 2$ (suggerimento: dimostrare per induzione);
- 2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2$ per ogni $n \geq 2$ (suggerimento: sfruttare il punto precedente);
- 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (suggerimento: sfruttare il punto precedente).

Esercizio 4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(n)) \log(2^n + 3^n)}{n! \log(1 + 2^{-n})}$$