ANALISI MATEMATICA I
SOLUZIONI COMPITO 16 GIUGNO 2014

Esercizio 1 Consideriamo la successione $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot 2014$.

Osserviamo che $a_0 = 2014$ e per (iii) $a_0 \in A$.
Inoltre (i) ci dice che $\forall n \quad a_n \in A \Rightarrow a_{n+1} \in A$

(infatti $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} 2014 = -\frac{1}{2} a_n$)

dunque per il principio di induzione

$$a_n \in A \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Inoltre l'ipotesi (ii) ci dice che

$$-a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} 2014 \notin A.$$

(a) $0 \notin A$ in quanto se fosse $0 \in A$ si avrebbe per (ii) che $-0 = 0 \notin A$, assurdo.

(b) $a_n \in A \ \forall n$ ma $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$
$\Rightarrow 0 \in \bar{A}$. Dunque $0 \in \bar{A} \setminus A \subseteq \partial A$.

(c) osserviamo che $\forall n$

$$\underset{a_{2n}}{\frac{2014}{2^{2n}}} \in A, \qquad \underset{-a_{2n+1}}{\frac{2014}{2^{2n+1}}} \notin A$$

In ogni intervallo $\left[\frac{2014}{2^{2n+1}}, \frac{2014}{2^{2n}}\right]$ ci deve

essere almeno un punto di ∂A in quanto gli estremi sono uno contenuto in A e l'altro no.
Ci sono quindi infiniti punti in ∂A.

Esercizio 2 Cerchiamo una primitiva di

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1+2}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

Una primitiva è $F(x) = \log|x-1| - \frac{2}{x-1}$, (definita per $x \neq 1$).

Dunque

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-1}^{0} = \log|-1| - \frac{2}{-1} - \log|-2| + \frac{2}{-2}$$

$$= 0 + 2 - \log 2 - 1 = 1 - \log 2.$$

Mentre

$$\int_2^{\infty} \frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b f(x) - \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\log|x-1| - \frac{2}{x-1} - \log|x|\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\log\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{2}{x-1}\right]_2^b = \lim_{b\to+\infty} \log\frac{b-1}{b} - \frac{2}{b-1} - \log\frac{1}{2} + \frac{2}{1}$$

$$= \log 1 - 0 + \log 2 + 2 = \log 2 + 2.$$

Esercizio 3 Posto $a_n = n^\beta \log(1+2^n)$ osserviamo

che si ha $a_n > 0$ e:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{\beta+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+2^n)}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2^n) + \log\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log 2 + \log(1+2^{-n})}{n}$$

(in quanto $\log(1+2^{-n}) \to 0$)

$$= \log 2$$

Dunque il carattere di $\sum a_n$ è lo stesso di $\sum n^{\beta+1}$ che sappiamo:

per $\beta \geq -2$ $(\beta+1 \geq -1)$ <u>diverge</u>

per $\beta < -2$ $(\beta+1 < -1)$ <u>converge</u>

Esercizio 4

$$f_a(x) = x^a \log x, \qquad a>0,\ x>0$$

1. $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$

quindi $\sup f_a = +\infty$

2. Studiamo il segno della derivata:

$$f_a'(x) = a x^{a-1} \log x + x^a \frac{1}{x} = x^{a-1}\left[a \log x + 1\right]$$

$x^{a-1} > 0 \quad \forall x>0.$

$a \log x + 1 > 0$ se $\log x > -\frac{1}{a}$

cioè se $x > e^{-\frac{1}{a}}$.

		$e^{-\frac{1}{a}}$	
f_a'	$-$	0	$+$
f_a	$\searrow$	min	$\nearrow$

Risulta quindi che in $x_a = e^{-\frac{1}{a}}$ la funzione f_a ha (l'unico) punto di minimo.

3. In tale punto la funzione vale:

$$m_a = f_a(x_a) = f_a\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^a \log\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= -\frac{1}{ae}.$$

%

Si ha dunque:

$$\lim_{a\to\infty} m_a = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{ae} = 0$$

$$\lim_{a\to 0^+} m_a = \lim_{a\to 0^+} -\frac{1}{ae} = -\infty$$

$$\lim_{a\to\infty} x_a = \lim_{a\to\infty} e^{-\frac{1}{a}} = 1$$

$$\lim_{a\to 0^+} x_a = \lim_{a\to 0^+} e^{-\frac{1}{a}} = 0$$