Analisi Matematica I
prima prova scritta parziale
14/11/2013

Esercizio 1 $\quad A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $a_n = \dfrac{2n-3}{n^2}$

* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{3}{n}}{n} = 0$

* Per quali n si ha $a_{n+1} \le a_n$?

$$a_{n+1} \le a_n \iff \frac{2(n+1)-3}{(n+1)^2} \le \frac{2n-3}{n^2} \iff$$

$$\iff (2n+2-3)n^2 \le (2n-3)(n+1)^2 \iff$$

$$\iff \cancel{2n^3} - n^2 \le \cancel{2n^3} - 3n^2 + 4n^2 - 6n + 2n - 3 \iff$$

$$\iff 2n^2 - 4n - 3 \ge 0 \qquad x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4+6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\Uparrow$$

$$n \ge \frac{2+\sqrt{10}}{2} \Leftarrow n \ge 3$$

a_n è decrescente per $n \ge 3$

$$\Downarrow$$

$$0 < a_n \le a_3 = \frac{1}{3} \quad \forall n \ge 3$$

n	1	2	3	4
a_n	-1	$1/4$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{16}$

$$a_3 = \frac{1}{3} \ge a_4 = \frac{5}{16} \ge a_2 = \frac{1}{4} \ge a_1 = -1$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \ge a_n \quad \forall n \ge 3$$

$$\Rightarrow a_3 = \max A = \sup A.$$

$$a_1 \le 0 < a_n \quad \forall n \ge 4$$
$$\le a_2 \le a_4 \le a_3. \quad \Rightarrow a_1 = \min A = \inf A$$

Visto che $a_n \to 0$ 0 è l'unico punto di accumulazione di $A \Rightarrow \mathcal{D}A = \{0\}$

Esercizio 2

(a) Per $x \to e$

$$\frac{\log \frac{x}{e}}{x-e} = \underbrace{\frac{\log\left(1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right)}{\frac{x}{e}-1}}_{\substack{\to 1 \\ \text{limite notevole } \frac{x}{e}-1\to 0}} \cdot \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

(b) Per $x \to e$

$$\left(\log x\right)^{\frac{x}{x^2-e^2}} = \underbrace{\left(\left(1+\log\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{\log\frac{x}{e}}}\right)}_{\substack{\to e \\ \text{limite notevole per } \log\frac{x}{e}\to 0}}^{\underbrace{\frac{\log\frac{x}{e}}{x-e}}_{\to \frac{1}{e} \text{ parte (a)}} \cdot \overbrace{\frac{x}{x+e}}^{\frac{e}{2e}=\frac{1}{2}}}$$

$$\longrightarrow e^{\frac{1}{e}\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2e}} = \sqrt[2e]{e}$$

Esercizio 3

$$a_n = \frac{4^n}{x^n+4^n} = \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^n+1}$$

se $x>4$ $\left(\frac{x}{4}\right)^n \to +\infty \Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow ?$

se $x=4$ $\left(\frac{x}{4}\right)^n = 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

se $x<4$ ($x>0$ per ipotesi) $\Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^n \to 0$

$$\Rightarrow a_n \to 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Se $x>4$ $\quad 0 \le a_n \le \frac{1}{\left(\frac{x}{4}\right)^n} = \left(\frac{4}{x}\right)^n$

$$\sum \left(\frac{4}{x}\right)^n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty.$$

Dunque per $0<x\le 4$ la serie diverge a $+\infty$
per $x>4$ la serie converge.

Per $x=8$: $\quad a_n = \frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n}$

Posto $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ = somma dei primi n termini

$S_n \to S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ = somma della serie

$$|S_n - S| = S - S_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \le \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^n}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{100} \Leftarrow 2^{n-1} > 100 \Leftarrow n \ge 8.$$

$(2^7 = 128)$

Se $n \geq 8$ $\quad \left| \sum_{k=0}^{7} a_k - S \right| < \frac{1}{100}$

Basta sommare 8 termini per avere un errore inferiore a $\frac{1}{100}$.

Esercizio 4

$\frac{f}{g} \to 1$ per $x \to +\infty$

(a) f ha un asintoto orizzontale $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{g(x)}{f(x)}}_{1} \underbrace{f(x)}_{L} = L.$$

$\Rightarrow$ anche g ha un asintoto orizzontale (lo stesso di f).

(b) è falsa. Infatti preso $f(x) = x$, $g(x) = x + \log x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x \text{ asintoto obliquo per } f$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\log x}{x} = 1 \qquad m = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

$\Rightarrow$ g non ha un asintoto obliquo.

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + \log x} = 1.$

(c)

$$\frac{\log f(x)}{\log g(x)} = \frac{\log f(x) - \log g(x)}{\log g(x)} + 1$$

$$= \frac{\log \frac{f(x)}{g(x)}}{\log g(x)} + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \Rightarrow \log \frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \\ \log g(x) \geq \log 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\log \frac{f(x)}{g(x)}}{\log g(x)} \to 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 0 + 1 = 1$$