

**ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLA PRIMA PROVA
INTERMEDIA**

ANALISI MATEMATICA I

Esercizio 1. Siano A e B insiemi che verificano la seguente proprietà:

$$\exists a \in A \quad \forall b \in B: b \in A \implies a = b.$$

Quali delle seguenti affermazioni sono certamente verificate?

- (1) $A \neq \emptyset$
- (2) $B \neq \emptyset$
- (3) $A = B$
- (4) $A \cap B$ ha meno di due elementi

Esercizio 2. Sia

$$E = \{x \in \mathbb{Q}: 1 < x^2 \leq 3, \}$$

Determinare: parte interna, chiusura, derivato di E .

Esercizio 3. Sia

$$A = \left\{ \frac{n^2 + n + 1}{(n + 1)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dell'insieme A .

Individuare $\mathcal{D}A$ e dire se A è chiuso o aperto.

Esercizio 4. Sia

$$A = \left\{ \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dell'insieme A .

Individuare $\mathcal{D}A$ e dire se A è chiuso o aperto.

Esercizio 5. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{n-1}$$

e verificare il risultato usando la definizione di limite.

Esercizio 6. Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = f(x^2)$?

Esercizio 7. Sia $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$. Disegnare il grafico di f e il grafico di $f \circ f$.

Esercizio 8. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + (-2)^n}{7^n + 2^n}$$

e verificare il risultato usando la definizione di limite.

Esercizio 9. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \frac{n^2}{n + 1} \right).$$

Esercizio 10. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}.$$

Esercizio 11. *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2^n \sqrt[n]{n!}}$$

Esercizio 12. *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

Esercizio 13. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos^2 x - 1}{x + x \sin x}$$

Esercizio 14. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

Esercizio 15. *Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$ calcolando esplicitamente la successione delle somme parziali.*

Esercizio 16. *Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(4 + (-1)^n)^n}$.*

Esercizio 17. *Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(4 + (-1)^n)^n}$.*