

# Matematica I

## Programma d'esame

CdL. Ottica e Optometria

25 settembre 2012

*Assioma di completezza.* Due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di numeri reali si dicono *separati* se

$$\forall a \in A, \forall b \in B: a \leq b;$$

un numero reale  $c$  si dice un *elemento di separazione* se

$$\forall a \in A, \forall b \in B: a \leq c \leq b.$$

L'*assioma di completezza* dice allora che se  $A$  e  $B$  sono insiemi separati e non vuoti allora esiste sempre un elemento di separazione. Ad esempio il numero  $c = \sqrt{2}$  può essere definito come l'unico elemento di separazione degli insiemi

$$A = \{x > 0: x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x > 0: x^2 \geq 2\}.$$

*Funzioni elementari.* Conoscere il grafico delle funzioni lineari, valore assoluto, potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

### *Limiti*

Proprietà dei limiti, funzioni continue. Limiti e continuità delle funzioni elementari. Limite della somma e del prodotto. Forme indeterminate. Confronto tra infiniti: scrivendo  $f(x) \ll g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  intendiamo che vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si hanno le seguenti relazioni:

$$\log x \ll x^\alpha \ll a^x$$

per ogni  $\alpha > 0$  e  $a > 1$ .

*Definizione di derivata.* Una funzione si dice derivabile in un punto  $x$  se il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

esiste ed è finito. In tal caso il valore di tale limite si chiama *derivata* di  $f$  nel punto  $x$  e si indica con  $f'(x)$ .

*Derivate delle funzioni elementari.* Conoscere le derivate delle funzioni lineari, potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

*Regole di derivazione.* Conoscere le regole di derivazione della somma, del prodotto, del quoziente e della funzione composta.

*Retta tangente al grafico di una funzione.* Se la funzione  $f(x)$  è derivabile nel punto  $x_0$  chiameremo *retta tangente* al grafico di  $f(x)$  nel punto  $x_0$  la retta passante per il punto  $(x_0, f(x_0))$  con coefficiente angolare  $f'(x_0)$  cioè la retta di equazione

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

*Funzioni monotone.* Una funzione  $f(x)$  si dice *crescente* se

$$x < y \implies f(x) \leq f(y).$$

In maniera analoga si definisce il concetto di funzione *decrescente*, *strettamente crescente*, *strettamente decrescente*.

*Criterio di monotonia.* Se  $f$  è una funzione definita su un intervallo, derivabile e con derivata non negativa allora  $f$  è crescente. Analogamente si ha un criterio sul segno della derivata di  $f$  per avere funzioni decrescenti, strettamente crescenti e strettamente decrescenti.

*Massimi e minimi.* Una funzione  $f(x)$  si dice avere un *massimo locale* nel punto  $x_0$  se

$$\exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \implies f(x_0) \geq f(x).$$

Analogamente (con opportune modifiche) si definisce il concetto di *minimo locale*, di *massimo assoluto* e di *minimo assoluto*.

*Teorema degli zeri e metodo di bisezione.* Se  $f(x)$  è una funzione continua definita sull'intervallo  $[a, b]$  e se la funzione assume segno discorde agli estremi  $a, b$  allora esiste almeno un punto  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $f(x_0) = 0$ . Per trovare il punto  $x_0$  si può utilizzare il metodo di bisezione. Si considera il punto medio dell'intervallo  $[a, b]$  e si guarda il segno della funzione  $f$  in tale punto. Tale segno sarà necessariamente discorde con uno dei segni assunti in  $a$  o in  $b$ . Si considera allora il semi-intervallo nei cui estremi la funzione  $f$  ha segno discorde e si ripete l'operazione su tale intervallo. Ad ogni iterazione l'intervallo si dimezza e avremo quindi una sempre migliore approssimazione della soluzione  $x_0$ .

*Teorema di de l'Hospital.* Consideriamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se entrambe le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  hanno limite 0 per  $x \rightarrow x_0$  e se il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, allora i due limiti coincidono.

*Nozione di o-piccolo.* Diremo che una funzione  $f(x)$  è *o-piccolo* di  $g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  e scriveremo:

$$f(x) = o(g(x))$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

*Polinomio di Taylor.* Il polinomio di Taylor di grado  $n$  della funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$  è il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

*Formula di Taylor.* Se  $f$  è una funzione derivabile almeno  $n$  volte nel punto  $x_0$  allora si ha

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

*Derivate parziali.* Se  $f(x, y)$  è una funzione di due variabili, le derivate parziali  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sono le derivate della funzione  $f$  rispetto alle variabili  $x$  e  $y$  tenendo fissata la variabile rispetto alla quale non si deriva.

*Teorema di Schwarz.* Se  $f(x, y)$  è derivabile due volte e le derivate seconde sono continue, allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

*Punti critici e matrice hessiana.* I *punti critici* di una funzione  $f(x, y)$  sono i punti in cui si annullano entrambe le derivate parziali. Se una funzione ha un massimo o un minimo in un punto, allora tale punto è necessariamente un punto critico. La *matrice hessiana* della funzione  $f$  è la matrice delle derivate seconde:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Il *determinante hessiano* di  $f$  è il determinante della matrice hessiana, ovvero:

$$\det D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Se il determinante hessiano in un punto critico è diverso da zero possiamo dire se il punto critico è un massimo, un minimo o un punto sella. Se il determinante hessiano è negativo il punto critico non è né massimo né minimo e si dice *punto di sella*. Se il determinante hessiano è positivo allora il punto critico è un minimo relativo se la traccia della matrice hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

è positiva, è invece un massimo relativo se la traccia è negativa.