Matematica I
Programma d'esame

CdL. Ottica e Optometria

15 dicembre 2011

Assioma di completezza. Due sottoinsiemi A e B di numeri reali si dicono *separati* se

$$\forall a \in A, \forall b \in B \colon a \leq b;$$

un numero reale c si dice un *elemento di separazione* se

$$\forall a \in A, \forall b \in B \colon a \leq c \leq b.$$

L'*assioma di completezza* dice allora che se A e B sono insiemi separati e non vuoti allora esiste sempre un elemento di separazione. Ad esempio il numero $c = \sqrt{2}$ può essere definito come l'unico elemento di separazione degli insiemi

$$A = \{x > 0 \colon x^2 \leq 2\}, \qquad B = \{x > 0 \colon x^2 \geq 2\}.$$

Funzioni elementari. Conoscere il grafico delle funzioni lineari, valore assoluto, potenza, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

Numeri complessi. Forma cartesiana dei numeri complessi: $z = x + iy$. Proprietà algebriche dei numeri complessi somma e prodotto. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi: il piano complesso. Risoluzione di equazioni complesse di primo e secondo grado. Rappresentazione polare dei numeri complessi: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Potenze di un numero complesso. Risoluzione di equazioni della forma $z^p + c = 0$. Esponenziale complesso, formula di Eulero $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, rappresentazione polare mediante esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$.

Definizione di limite. Si dice che una funzione $f(x)$ ammette limite ℓ per $x \to x_0$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se vale la proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta, \; x \neq x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Definizioni analoghe (con le opportune modifiche!) si danno nel caso in cui x_0 o ℓ valgono $+\infty$ o $-\infty$.

Confronto tra infiniti. Scrivendo $f(x) \ll g(x)$ per $x \to x_0$ intendiamo che vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Per $x \to +\infty$ si hanno le seguenti relazioni:

$$\log x \ll x^\alpha \ll a^x$$

per ogni $\alpha > 0$ e $a > 1$.

Continuità. Una funzione $f(x)$ si dice essere *continua nel punto* x_0 se vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Una funzione $f(x)$ si dice essere *continua* se è continua in ogni punto del proprio dominio.

Definizione di derivata. Una funzione si dice derivabile in un punto x se il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

esiste ed è finito. In tal caso il valore di tale limite si chiama *derivata* di f nel punto x e si indica con $f'(x)$.

Derivate delle funzioni elementari. Conoscere le derivate delle funzioni lineari, potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

Regole di derivazione. Conoscere le regole di derivazione della somma, del prodotto, del quoziente e della funzione composta.

Retta tangente al grafico di una funzione. Se la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 chiameremo *retta tangente* al grafico di $f(x)$ nel punto x_0 la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$ cioè la retta di equazione

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Funzioni monotone. Una funzione $f(x)$ si dice *crescente* se

$$x < y \implies f(x) \le f(y).$$

In maniera analoga si definisce il concetto di funzione *decrescente*, *strettamente crescente*, *strettamente decrescente*.

Criterio di monotonia. Se f è una funzione definita su un intervallo, derivabile e con derivata non negativa allora f è crescente. Analogamente si ha un criterio sul segno della derivata di f per avere funzioni decrescenti, strettamente crescenti e strettamente decrescenti.

Massimi e minimi. Una funzione $f(x)$ si dice avere un *massimo locale* nel punto x_0 se

$$\exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \implies f(x_0) \ge f(x).$$

Analogamente (con opportune modifiche) si definisce il concetto di *minimo locale*, di *massimo assoluto* e di *minimo assoluto*.

Teorema degli zeri e metodo di bisezione. Se $f(x)$ è una funzione continua definita sull'intervallo $[a, b]$ e se la funzione assume segno discorde agli estremi a, b allora esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$. Per trovare il punto x_0 si può utilizzare il metodo di bisezione. Si considera il punto medio dell'intervallo $[a, b]$ e si guarda il segno della funzione f in tale punto. Tale segno sarà necessariamente discorde con uno dei segni assunti in a o in b. Si considera allora il semi-intervallo nei cui estremi la funzione f ha segno discorde e si ripete l'operazione su tale intervallo. Ad ogni iterazione l'intervallo si dimezza e avremo quindi una sempre migliore approssimazione della soluzione x_0.

Teorema di de l'Hospital. Consideriamo il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno limite 0 per $x \to x_0$ e se il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste, allora i due limiti coincidono.

Nozione di o-piccolo. Diremo che una funzione $f(x)$ è *o-piccolo* di $g(x)$ per $x \to x_0$ e scriveremo:

$$f(x) = o(g(x))$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Polinomio di Taylor. Il polinomio di Taylor di grado n della funzione $f(x)$ nel punto x_0 è il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Formula di Taylor. Se f è una funzione derivabile almeno n volte nel punto x_0 allora si ha

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Derivate parziali. Se $f(x, y)$ è una funzione di due variabili, le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono le derivate della funzione f rispetto alle variabili x e y tenendo fissata la variabile rispetto alla quale non si deriva.

Teorema di Schwarz. Se $f(x, y)$ è derivabile due volte e le derivate seconde sono continue, allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Punti critici e matrice hessiana. I *punti critici* di una funzione $f(x, y)$ sono i punti in cui si annullanno entrambe le derivate parziali. Se una funzione ha un massimo o un minimo in un punto, allora tale punto è necessariamente un punto critico. La *matrice hessiana* della funzione f è la matrice delle derivate seconde:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Il *determinante hessiano* di f è il determinante della matrice hessiana, ovvero:

$$\det D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Se il determinante hessiano in un punto critico è diverso da zero possiamo dire se il punto critico è un massimo, un minimo o un punto sella. Se il determinante hessiano è negativo il punto critico non è né massimo né minimo e si dice *punto di sella.* Se il determinante hessiano è positivo allora il punto critivo è un minimo relativo se la traccia della matrice hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

è positiva, è invece un massimo relativo se la traccia è negativa.