Matematica (gruppo A)
Esercizi di preparazione (Probabilità e Statistica)

Cdl Biologia, a.a. 2011-2012

22 aprile 2024

Esercizio 1. *Una urna contiene 3 palline rosse. Nell'urna vengono aggiunte anche delle palline bianche in modo che la probabilità di estrarre una pallina rossa risulti circa il 43%. Quante sono le palline bianche?*

Dall'urna vengono poi estratte ad una ad una tutte le palline in ordine casuale. Qual è la probabilità che le 3 palline rosse siano estratte per ultime?

Soluzione. Sia n il numero di palline bianche. La probabilità di estrarre una pallina rossa è dunque $3/(n+3) = 0.43$ da cui si ricava $n = 4$.

La probabilità che le tre palline rosse siano estratte per ultime è uguale alla probabilità che siano estratte per prime. La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $3/7$, dopodiché la probabilità che la seconda pallina sia rossa è $2/6$ e che la terza sia ancora rossa è $1/5$. Dunque la probabilità cercata è $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{210} = 2.9\%$.

Esercizio 2. *Per eseguire un esame diagnostico sono stati sviluppati tre tipi di test A, B e C che vengono utilizzati rispettivamente nel 50%, 40% e 10% degli esami. L'affidabilità dei test è rispettivamente del 90%, 95% e 99%. Sapendo che un test è risultato errato, qual è la probabilità che fosse di tipo B?*

Soluzione. Sia F l'evento "il test è fallito" e siano A, B e C gli eventi corrispondenti ad ogni tipo di test. L'esercizio ci chiede di calcolare $P(B|F)$ e ci fornisce i seguenti dati:

$$\begin{array}{ccc} P(A) = 0.5 & P(B) = 0.4 & P(C) = 0.1 \\ P(F|A) = 0.1 & P(F|B) = 0.05 & P(F|C) = 0.01 \end{array}$$

Utilizzando la formula di Bayes si ha allora

$$P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) = 0.071$$
$$P(B|F) = \frac{P(F|B)P(B)}{P(F)} = 0.28 = 28\%$$

Esercizio 3. *Una fabbrica di decorazioni natalizie produce dei fili con 20 lampadine colorate. Il colore delle lampadine viene scelto a caso con uguale probabilità tra i colori: giallo, verde e rosso. Calcolare la probabilità che in un filo ci siano solo 4 lampadine rosse. Calcolare la probabilità che in una scatola con 10 fili ce ne sia almeno uno con 4 lampadine rosse.*

Soluzione. Ogni lampadina è rossa con probabilità $a = 1/3$. La probabilità che su $n = 20$ lampadine ce ne siano esattamente $k = 4$ rosse è data dunque dalla distribuzione binomiale:

$$p = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{16} = 0.091 = 9.1\%$$

La probabilità che su 10 fili ce ne sia almeno uno con 6 lampadine rosse è complementare alla probabilità che su 10 fili nessuno abbia 6 lampadine rosse. Dunque tale probabilità è data da:

$$1 - (1-p)^{10} = 1 - (0.909)^{10} = 0.61 = 61\%$$

Esercizio 4. *Un neurone emette in media 3.7 impulsi al secondo. Qual è la probabilità che in un secondo emetta 5 impulsi? Qual è la probabilità che in un minuto emetta più di 250 impulsi?*

Soluzione. Il numero di emissioni al secondo è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di media $\lambda = 3.7$ quindi la probabilità di avere k emissioni al secondo è data da $p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. La probabilità che in un secondo emetta 5 impulsi è dunque

$$p_5 = \frac{(3.7)^5 e^{-3.7}}{5!} = 0.14 = 14\%.$$

In un minuto la media di impulsi emessi è $3.7 \cdot 60 = 222$. Per calcolare la probabilità che vengano emessi più di 250 impulsi è però troppo complicato utilizzare la distribuzione di Poisson. Approssimiamo allora la distribuzione di Poisson con una distribuzione normale con la stessa media $\mu = 222$ e la stessa varianza $\sigma^2 = 222$ della Poisson. Si ha dunque $\sigma = 14.9$ e, se X è il numero di emissioni al minuto e Z è la variabile standardizzata, si ha:

$$\begin{aligned} P(X > 250) &= P\left(Z > \frac{250-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > 1.88) \\ &= \frac{1}{2} - \Phi(1.88) = 0.500 - 0.470 = 0.030 = 3.0\% \end{aligned}$$

Esercizio 5. *In un gioco d'azzardo si lanciano due dadi e si vincono 5 euro se escono dadi doppi. Per fare una giocata si paga un euro. Calcolare la speranza di guadagno del giocatore in una giocata, e la deviazione standard.*

Qual è la probabilità di avere un guadagno positivo dopo 30 giocate?

Soluzione. In una giocata si guadagnano $5 - 1 = 4$ euro con probabilità $1/6$ e si perde 1 euro con probabilità $5/6$. Il guadagno medio è dunque

$$\mu = 4 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

e la varianza è

$$\sigma^2 = \left(4 + \frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(-1 + \frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} = 3.47$$

da cui $\sigma = 1.86$

Dopo 30 giocate possiamo approssimare la distribuzione di probabilità del nostro guadagno con una distribuzione normale X di media $m = 30\mu = -5$ e deviazione standard $s = \sqrt{30\sigma^2} = 10.21$. Dunque si ha

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= P\left(Z > \frac{0 - m}{s}\right) = P(Z > 0.49) \\ &= \frac{1}{2} - \Phi(0.49) = 0.50 - 0.19 = 0.31 = 31\% \end{aligned}$$

Esercizio 6. *I mattoni prodotti da una certa fabbrica hanno una lunghezza media di* 15 *centimetri con una deviazione standard di* 0.4 *centimetri. Qual è la probabilità che un mattone abbia lunghezza compresa tra* 14.5 *e* 15 *centimetri? Mettendo in fila 10 mattoni, qual è la probabilità che la lunghezza complessiva sia inferiore a* 151 *centimetri?*

Soluzione. Se X è la lunghezza di un mattone e Z la variabile standard, si ha

$$\begin{aligned} P(14.5 < X < 15) &= P\left(\frac{14.5 - 15}{0.4} < Z < \frac{15 - 15}{0.4}\right) = P(-1.25 < Z < 0) \\ &= \Phi(0) - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) = 0.40 = 40\% \end{aligned}$$

La somma delle lunghezze di 10 mattoni è una variabile Y che ha media $15 \cdot 10 = 150$ centimetri e deviazione standard pari a $\sqrt{10 \cdot (0.4)^2} = 1.26$ centimetri. La probabilità che Y sia inferiore a 151 centimetri è dunque data da:

$$\begin{aligned} P(Y < 151) &= P\left(Z < \frac{151 - 150}{1.26}\right) = P(Z < 0.79) \\ &= \Phi(0.79) + \frac{1}{2} = 0.29 + 0.50 = 0.79 = 79\% \end{aligned}$$

Esercizio 7. *Una macchina per imbottigliare può dosare in una bottiglia una qualunque quantità di vino con un errore di 0.005 litri. Quale quantità di vino dobbiamo programmare sulla macchina perché la probabilità che in una bottiglia ci sia meno di un litro sia uguale all'1%?*

Soluzione. Sia μ la quantità da programmare sulla macchina. Non avendo informazioni più precise possiamo supporre che la quantità di vino inserita in ogni bottiglia sia una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media μ e deviazione standard $\sigma = 0.005$. La probabilità che in una bottiglia ci sia meno di un litro è dunque data da

$$P(X < 1) = P\left(Z < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = \Phi((1-\mu)/\sigma) + \frac{1}{2}$$

Se vogliamo che tale probabilità sia l'1% avremo quindi

$$\Phi((1-\mu)/\sigma) + \frac{1}{2} = 0.01$$

da cui

$$\Phi((1-\mu)/\sigma) = -0.49$$

cioè

$$\Phi((\mu-1)/\sigma) = 0.49$$

e guardando sulla tavola dei valori di Φ otteniamo quindi

$$\frac{\mu-1}{\sigma} = 2.33$$

da cui ricordando che $\sigma = 0.005$ si ha

$$\mu = 2.33 \cdot 0.005 + 1.0 = 1.012$$