Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

22 Settembre 2010- COMPITO 1- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty}(1+\sin^2\frac{1}{n})^{n^2+1}$, (b) $\lim_{x\to(-1)^-} x^2+\log(\frac{1+x}{x^2})$.

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\log^2 3x}{x}\cos(\log 3x-5)\,dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x)=x+\arctan(\frac{x-2}{x})$.

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x)=\frac{e^{5x}}{x+4}$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y'=\frac{1}{x^2}y-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2+5x}y^2$.

6. (4 punti) In una scatola ci sono 12 sciarpe di cui 8 bianche e 4 rosse. Se ne scelgono a caso 3: qual´ la probabilitá che nessuna sia rossa?

7. (4 punti) Una certa varietá di mais si presenta sotto tre possibili varianti, A, B e C, che rappresentano rispettivamente il 30%, il 50% e il 20% del totale della varietá . É noto che quel tipo di mais puó presentare una particolare alterazione genetica che si manifesta nel 50% dei casi per la variante A, nel 80% dei casi nella variante B e nel 90% dei casi nella variante C. a) Qual é la percentuale totale del mais che presenta lalterazione genetica? b) Se un campione di mais preso a caso presenta lalterazione, qualé la probabilitá che si tratti della variante A?

8. (8 punti) **Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

Soluzioni del compit0 del 22 Settembre 2010

1. $(a) = 1 \qquad (b) = -\infty$.

2. $\log 3x = t$, $dx = xdt$ usando il procedimento per l'integrazione per parti si ottiene:

$$\int t^2 \cos(t-5)\, dx = t^2 \sin(t-5) - 2\int t \sin(t-5)\, dx$$

$$= t^2 \sin(t-5) + 2t\cos(t-5) - 2\int \cos(t-5)\, dx = t^2 \sin(t-5) + 2t\cos(t-5) - 2\ sin(t-5) + C$$

3. f é definita $x \neq=$ si ha

$$\lim_{x\to(0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to(0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

quindi non ci sono due asintoti verticali.

Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \frac{\pi}{4}$. La retta $y = x + \frac{\pi}{4}$ é un asintoto obbliquo. Analogo comportamento a $-\infty$

4. f é definita per $x \neq -4$.

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{e^{5x}}{(x+4)^2}(5x+20)$$

$f'(x) = 0$ in $x = -\frac{19}{5}$ (punto di min relativo) e $x = 2$(punto di minimo relativo). f crescente in $(-\infty, -4) \cup (-\frac{19}{5}, +\infty)$, decresce in $(-4, -\frac{19}{5}) \cup (1, 2)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

e quindi la funzione non ha valore massimo e minimo.

5. Equazione di Bernoulli, pongo $z = \frac{1}{y}$, e quindi l'equazione diventa:

$$z' = -\frac{1}{x^2} z + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 + 5x}$$

da cui si ottiene:

$$z(x) = e^{\frac{1}{x}}(-\int \frac{e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}}}{x(x+5)} dx + C)$$

quindi dall'integrazine delel funzioni razionali si ottiene

$$z(x) = e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{5}\int \frac{1}{x)}\, dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+5)}\, dx + C) = e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{5}\log|x| - \frac{1}{5}\log|x+5| + C).$$

da cui si ricava $y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{5}\log|x| - \frac{1}{5}\log|x+5| + C)}$.

6. Le possibili terne sono $\frac{12!}{3!9!} = 220$, le terne quindi di sciarpe biache sono$\frac{8!}{3!5!} = 56$ La probabilitá che tutte e tre le sciarpe siano bianche é data da : $\frac{56}{220}$.

7. Evento $A, B.C$ $A, B.C$ la variante del mais.

$$P(A) = 0,3, \quad P(B) = 0,5, \quad P(C) = 0,2$$

. S presentare l'alterazione genetica:

$$P(S/A) = 0,5, \quad P(S/B) = 0,8, \quad P(s/C) = 0,9$$

. (a) deriva dalla legge della probabilitá composta:

$$P(S) = P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) + P(S/C)P(C)$$

(b) si ottiene utilizzando il teorema di Bayes

$$P(A/S) = \frac{P(S/A)P(A)}{P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) + P(S/C)P(C)}$$

.