Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

4 Febbraio 2010- COMPITO 1- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sin(n+1)}{n-\cos n}$, $\qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^1 xe^{\sqrt{x}} \quad dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{x^2+1}{\log x - 2}$.

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{x+1}}$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y''+2y'+y = e^{2x}$. Quante soluzioni soddisfano la condizione $y(0) = 1$.

6. (4 punti) Quattro provette contengono ciascuna un campione di una sostanza A mentre una quinta, esteriormente indistinguibile dalle altre, contiene un campione di una sostanza B. Disponiamo di un rivelatore che diventa positivo il 50% delle volte con la sostanza A e il 75% con la sostanza B.

   a) Qual è la probabilità che, scegliendo a caso una provetta, il rilevatore diventi positivo?

   b) Se il rivelatore diventa positivo, qual è la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza B?

7. (4 punti) Una vasca contiene un numero molto grande di sferette il cui raggio è una variabile aleatoria normalmente distribuita con media 1.5 mm e deviazione standard 0.2 mm.
   a) Qual è la probabilità di estrarre una sferetta con raggio compreso fra 1.5 e 1.7 millimetri?
   b) Prendendo a caso cinque sferette, calcolare la probabilità che almeno due di queste abbiano un raggio compreso fra 1.5 e 1.7 millimetri.

8. (8 punti) **Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive**

Soluzioni

1. $(a) = 2 \qquad (b) = e.$

2. $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \Rightarrow x = 1 \quad t = 1, x = 0 \quad t = 0$ si ottiene:

$$\int_0^1 2t^3 e^t dt$$

   che si risolve per parti.

3. f é definita $x > 0$ e $x \neq e^2$, si ha

$$\lim_{x \to (e^2)^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to (e^2)^-} f(x) = -\infty$$

   quindi $x = e^2$ asintoti verticale.

   Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Non ci sono asintoti obbliqui.

4. f é definita per $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$.

$$f'(x) = \frac{e^{3x}(6(x+1)-1)}{(\sqrt{x+1})^3}$$

   $x = -\frac{5}{6}$ minimo. Inoltre $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La funzione non ha valore massimo.

5. Euqazione di secondo grado a coefficienti costanti. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$. Le soluzioni dell'omogenea: $C_1 e^{-x} + C_1 x e^{-x}$.

   Una soluzione particolare della forma $\bar{y} = Ae^{2x}$ e quindi $A = \frac{1}{9}$. Vi sono infinite soluzioni che soddisfano $y(0) = 1$.

Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

4 Febbraio 2010- COMPITO 2- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n - n}{n+\cos(n+1)}$, (b) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{e^x}{e^x+1})^{\frac{1}{x}}$.

(a) (b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito $\int_{\log 2}^{\log 5} \sqrt{e^x - 1} \quad dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{-x}-2}$.

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x) = \arctan 3e^x - \log(1 + 9e^{2x})$.

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' = \frac{xy}{\sqrt{x^2-1}}$ e verificare se esiste una soluzione che tale che: $\lim_{+\infty} y(x) = +\infty$.

6. (4 punti) Cinque provette contengono ciascuna un campione di una sostanza A mentre una sesta, esteriormente indistinguibile dalle altre, contiene un campione di una sostanza B. Disponiamo di un rivelatore che diventa positivo il 50% delle volte con la sostanza A e il 75% con la sostanza B.
a) Qual è la probabilità che, scegliendo a caso una provetta, il rilevatore diventi positivo?
b) Se il rivelatore diventa positivo, qual è la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza B?

7. (4 punti) Una vasca contiene un numero molto grande di sferette il cui raggio è una variabile aleatoria normalmente distribuita con media 1.5 mm e deviazione standard 0.2 mm.
a) Qual è la probabilità di estrarre una sferetta con raggio compreso fra 1.3 e 1.7 millimetri?
b) Prendendo a caso cinque sferette, calcolare la probabilità che almeno due di queste abbiano un raggio compreso fra 1.3 e 1.7 millimetri.

8. (8 punti) **Definizione di limite di una successione e Teorema di Unicitá.**

Soluzioni

1. $(a) = -1$ e $(b) = 1$.

2. $\sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$. L'integrale diventa

$$\int_1^2 \frac{2t}{t^2+1} dt = 2[t - \arctan t]_1^2 = ...$$

3. $f(x) = \frac{e^{3x}}{1-2e^{2x}}$ é definita per $x \neq -\log 2$

$$\lim_{x \to (-\log 2)^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to (-\log 2)^+} f(x) = -\infty$$

$x = -\log 2$ asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$, non ci sono asintoti obbliqui.

4.

$$f'(x) = \frac{3e^x}{1 + 9e^{2x}} - \frac{18e^{2x}}{1 + 9e^{2x}},$$

quindi

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(3 - 18e^x) = 0 \Rightarrow 18e^x = 3$$

$x = \log \frac{1}{6}$ massimo relativo. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

non ha valore minimo.

5. Equazione differenziale a variabili separate:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow \log y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y(x) = Ce^{\sqrt{x^2-1}}$$

per $c > 0$ la soluzione soddisfa $\lim_{+\infty} y(x) = +\infty$.

Matematica, 12 CFU Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

4 Febbraio 2010- COMPITO 3- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: $(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n-e^{\sin(n+1)}}{n+\log n}$, $\qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^{\log(2-(\sin x)^2)}$.

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{\log 8} \frac{e^{3x}}{e^{6x}+4} \quad dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{e^{-2x}}{e-e^x}$.

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \log(1+4e^{2x}) - \arctan 2e^x$.

5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale: $y'-2xy+xe^{-x^2}y^2 = 0$, tale che $y(0) = 5$.

6. (4 punti) Quattro provette contengono ciascuna un campione di una sostanza A mentre una quinta, esteriormente indistinguibile dalle altre, contiene un campione di una sostanza B. Disponiamo di un rivelatore che diventa positivo il 25% delle volte con la sostanza A e il 30% con la sostanza B.
   1) Qual è la probabilità che, scegliendo a caso una provetta, il rilevatore diventi positivo?
   2) Se il rivelatore diventa positivo, qual è la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza B?

7. (4 punti) Una vasca contiene un numero molto grande di sferette il cui raggio è una variabile aleatoria normalmente distribuita con media 1.5 mm e deviazione standard 0.3 mm.
   1) Qual è la probabilità di estrarre una sferetta con raggio compreso fra 1.5 e 1.8 millimetri?
   2) Prendendo a caso sei sferette, calcolare la probabilità che almeno due di queste abbiano un raggio compreso fra 1.5 e 1.8 millimetri.

8. (8 punti) **Criterio di monotonia: condizioni necessarie e sufficienti per la crescenza di una funzione derivabile**

Soluzioni

1. $(a) = 2$ e $(b) = 1$.

2. $e^{3x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{3}\log t \Rightarrow dx = \frac{1}{3t}dt$. L'integrale diventa

$$\int_1^{2^9} \frac{1}{3}\frac{1}{t^2+4} = \arctan ....$$

3. $e - e^x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Si ha.

$$\lim_{x\to(1)^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to(1)^+} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$y = 0$ asintoto orizzontale a $+\infty$, non ci sono asintoti obbliqui.

4.
$$f'(x) = \frac{8e^{2x}}{1+4e^{2x})} - \frac{2e^x}{1+4e^{2x})},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(4e^x - 1) = 0 \Rightarrow 4e^x = 1$$

$x = \log\frac{1}{4}$ minimo relativo. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

non ha valore massimo.

5. Si tratta di un equazione di Bernoulli: $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$. L'equazione diventa:

$$z' = -2xz + xe^{-x} \Rightarrow z(x) = e^{-x}(\frac{1}{2}x^2 + C)$$

La soluzione con $C = \frac{1}{5}$ soddisfa $y(0) = 5$.

Matematica, 12 CFU

Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2009-2010 Laurea Triennale

4 Febbraio 2010- COMPITO 4- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-\log(1+(\sin n)^2)}{n-e^{\sin n}}$, (b) $\lim_{x\to+\infty} (\log x)^{\frac{3}{x-10}}$.

(a)	(b)

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_{\log 4}^{\log 9} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1-e^x} \, dx$.

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{e^x-e}$.

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{e^{3x}}$.

5. (5 punti) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = yx + \frac{x}{y}$, tale che $y(0) = 1$.

6. (4 punti) Cinque provette contengono ciascuna un campione di una sostanza A mentre una sesta, esteriormente indistinguibile dalle altre, contiene un campione di una sostanza B. Disponiamo di un rivelatore che diventa positivo il 25% delle volte con la sostanza A e il 30% con la sostanza B.
1) Qual è la probabilità che, scegliendo a caso una provetta, il rilevatore diventi positivo?
2) Se il rivelatore diventa positivo, qual è la probabilità di aver scelto la provetta con la sostanza B?

7. (4 punti) Una vasca contiene un numero molto grande di sferette il cui raggio è una variabile aleatoria normalmente distribuita con media 1.5 mm e deviazione standard 0.3 mm.
1) Qual è la probabilità di estrarre una sferetta con raggio compreso fra 1.2 e 1.8 millimetri?
2) Prendendo a caso sei sferette, calcolare la probabilità che almeno due di queste abbiano un raggio compreso fra 1.2 e 1.8 millimetri.

8. (8 punti) **Funzioni Derivabili e Teorema di Rolle**

Soluzioni

1. $(a) = 1$ e $(b) = 1$.

2. $e^{\frac{x}{2}} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \log t \Rightarrow dx = \frac{2}{t} dt$. L'integrale diventa

$$\int_2^3 \frac{2}{1-t^2} = ... = [-\log|t-1| + \log|1+t|]_2^3 = ...$$

3. $e^x - e \neq 0 \Rightarrow X \neq 1$. Si ha.

$$\lim_{x \to (1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (1)^+} f(x) = +\infty$$

$x = 1$ asintoto verticale. Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$y = 0$ asintoto orizzontale a $+\infty$, non ci sono asintoti obbliqui.

4. f é definita per $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - 6(x+1)}{e^{3x} 2\sqrt{x+1}},$$

$x = -\frac{5}{6}$ massimo relativo. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $f(-1) = 0$ e $f(x) \geq 0$. f assume valore minimo in $x = -1$.

5. Equazione differenziale a variabili separate:

$$\frac{y'y}{y^2 * 1} = x \Rightarrow \frac{1}{2}\log(y^2+1) = \frac{1}{2}X^2 + c \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{Ce^{x^2} - 1}.$$

Per determinare la soluzione tale che $y(0) = 1$ basta prendere $C = 2$.

Svolgimento degli esercizi di probabilitá e statistica

Esercizio di tipo A.
La prima parte è data da

$$p_1 = P(A)P(+ \mid A) + P(B)P(+ \mid B)$$

(dove A [B] indica l'evento "scelgo la provetta con la sostanza A [B]", mentre $+$ indica l'evento "il rivelatore è positivo"). La seconda parte è data dalla formula di Bayes:

$$p_2 = \frac{P(B)P(+ \mid B)}{P(A)P(+ \mid A) + P(B)P(+ \mid B)}.$$

Notare che p_1 è il denominatore di p_2. Le soluzioni dei quattro esercizi N.6 sono quindi:

1. (a) $p_1 = 11/20$; (b) $p_2 = 3/11$;
2. (a) $p_1 = 13/24$; (b) $p_2 = 3/13$;
3. (a) $p_1 = 13/50$; (b) $p_2 = 3/13$;
4. (a) $p_1 = 31/120$; (b) $p_2 = 6/31$.

Esercizi di tipo B.
Nei compiti N. 1 e N.3 la prima parte si fa per standardizzazione, riconducendosi alla probabilità della normale standard

$$p_1 = P(0 \leq Z \leq 1) \approx 0.34$$

Nei compiti N. 2 e N. 4 la standardizzazione conduce a

$$p_1 = P(-1 \leq Z \leq 1) \approx 0.68$$

La seconda parte si fa con la distribuzione binomiale. Se X indica il numero di sferette che rientrano nell'intervallo richiesto si ha

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

Dunque, nei compiti N.1 e N. 2 si ha

$$p_2 = 1 - (1 - p_1)^5 - 5\, p_1\, (1 - p_1)^4$$

mentre in quelli N. 3 e N. 4 si ha

$$p_2 = 1 - (1 - p_1)^6 - 6\, p_1\, (1 - p_1)^5.$$

Sostituendo i valori e riassumendo, nei 4 compiti i risultati sono

1. (a) $p_1 = 0.34$; (b) $p_2 = 0.552$;
2. (a) $p_1 = 0.68$; (b) $p_2 = 0.961$;
3. (a) $p_1 = 0.34$; (b) $p_2 = 0.662$;
4. (a) $p_1 = 0.68$; (b) $p_2 = 0.985$.