Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

16 Luglio 2012- **COMPITO 3**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n! - 2n^n}{n^n - n^3} \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(e^{x^3} - 1\right)}{(\sin x)^2}$$

(a) -2 (b) 0

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{\cos(x)\,\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x)^2 - 4}\, dx$.

sen $t = x$

$\cos x\, dx = dt$

$\int \frac{t-1}{t^2-4}\, dt =$ decomposizione $= \frac{1}{4}\log|t-2| + \frac{3}{4}\log|t+2| + c$

$\frac{t-1}{t^2-4} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \quad B = \frac{3}{4}$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{\sqrt{\log(x^2 - 3x + 1)}}{3x}$.

$\boxed{\text{Insieme definizione} \quad x < 0 \quad x \geq 3}$

$\begin{cases} \log(x^2-3x+1) > 0 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 > 1 \Rightarrow x(x-3) > 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ (Asint. verticale)

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (asint. orizz)

no asintoti obbliqui

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = e^{\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}$.

$x \neq \pm 1$, f. pari.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

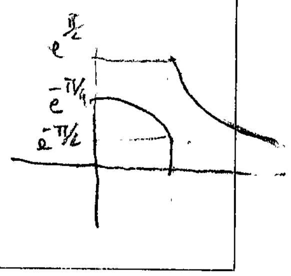
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{\pi/2}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = e^{-\pi/2}$

$f'(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2} =$

$= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \cdot \frac{\cancel{(x^2-1)^2}}{(x^2-1)^2+1} \cdot \frac{(-2x)}{\cancel{(x^2-1)^2}}$

$x = 0$ max relativo, $f(0) = e^{-\pi/4}$



5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'\,x + \frac{3}{2}\,y = \frac{\sin(x)}{x^2}\,y^{-1}$, definita nell'intervallo $[1,5]$ e tale che $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Bernoulli $z = y^2$ $z' = 2yy'$ 　　per $y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c = (\frac{\pi}{2})^3$

$\frac{z'}{2}x + \frac{3}{2}z = 2\frac{\operatorname{sen}x}{x^2} \Rightarrow z' = -3\frac{z}{x} + \frac{\operatorname{sen}x}{x^3}$

$z(x) = e^{-\log(x^3)}\left[\int e^{\log(x^3)} \cdot \frac{\operatorname{sen}x}{\cancel{x^3}}\,dx + c\right] = \frac{1}{x^3}\left[\int \operatorname{sen}x\,dx + c\right] = \frac{1}{x^2}\left[-\cos x + c\right]$

6. (4 punti) Un batterio puó assumere quattro diverse varianti: A, B, C e D. Le varianti A e B si presentano ognuna nel 40% dei casi, le varianti C e D si presentano ognuna nel 10% dei casi. Un particolare test, se eseguito sul tipo A, dá risultato positivo nel 10% dei casi. Sul tipo B e sul tipo C il risultato é positivo nel 5% dei casi mentre sul tipo D il risultato é positvo nel 50% dei casi. Se su un particolare batterio il risultato positivo, qual é la probabilitá che sia di tipo D?

P = positività del test

$P(A) = 0{,}4$ 　 $P(P/A) = 0{,}1$

$P(B) = 0{,}4$ 　 $P(P/B) = 0{,}05$

$P(C) = 0{,}1$ 　 $P(P/C) = 0{,}05$

$P(D) = 0{,}1$ 　 $P(P/D) = 0{,}5$

$P(D/P) = \frac{P(D\cap P)}{P(P)} = \Rightarrow \boxed{P(D/P) = 0{,}43 = 43\%}$

$= \frac{P(P/D)\cdot P(D)}{P(P/A)\cdot P(A) + P(P/B)P(B) + P(P/C)P(C) + P(P/D)\cdot P(C)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}115}$

7. (4 punti) Il pH arterioso in un adulto sano é una variabile con distribuzione normale di media $\mu = 7.40$ e scarto quadratico medio $\sigma = 0.03$. Calcolare la probabilitá che in una popolazione di 87 individui tutti abbiano un valore del pH maggiore di 7.35.

la probabilità che un individuo abbia $pH > 7.35$, rinormalizzando ad una variabile standard z.

$p = P(pH > 7.35) = P\left(\frac{pH - 7.40}{0.03} > -1{,}67\right)$

$= P(z > -1.67) = \Phi(+\infty) - \Phi(-1{,}67) = 0{,}5 + \Phi(1.67) = 0.5 + 0{,}4525 = 0{,}9525$

8. (8 punti) **Minimi e massimi relativi. Teorema di Fermat e di Rolle.** 　la prob è quindi $p^{87} = 0{,}014 = 1{,}4\%$