

Matematica (gruppo A)

(Probabilità e Statistica)

Cdl Biologia, a.a. 2011-2012

16 luglio 2012

Esercizio 6. Un batterio può assumere quattro diverse varianti: A, B, C e D. Le varianti A e B si presentano ognuna nel 40% dei casi, le varianti C e D si presentano ognuna nel 10% dei casi. Un particolare test, se eseguito sul tipo A, dà risultato positivo nel 10% dei casi. Sul tipo B e sul tipo C il risultato è positivo nel 5% dei casi mentre sul tipo D il risultato è positivo nel 50% dei casi. Se su un particolare batterio il risultato è positivo, qual è la probabilità che sia di tipo D?

Soluzione. Indichiamo con P la positività al test. Le informazioni che abbiamo sono dunque:

$$p(A) = 0.4, \quad p(B) = 0.4, \quad p(C) = 0.1, \quad p(D) = 0.1,$$
$$p(P|A) = 0.1, \quad p(P|B) = 0.05, \quad p(P|C) = 0.05, \quad p(P|D) = 0.5$$

Ci viene chiesto di calcolare $p(D|P)$. Sappiamo che:

$$p(D|P) = \frac{p(D \cap P)}{p(P)} = \frac{p(P|D)p(D)}{p(P)} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{p(P)}$$

d'altra parte

$$p(P) = p(P|A)p(A) + p(P|B)p(B) + p(P|C)p(C) + p(P|D)p(D)$$
$$= 0.1 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.115$$

e quindi, in conclusione

$$P(D|P) = \frac{0.05}{0.115} = 0.43 = 43\%$$

Esercizio 7. Il pH arterioso in un adulto sano è una variabile con distribuzione normale di media $\mu = 7.40$ e scarto quadratico medio $\sigma = 0.03$. Calcolare la probabilità che in una popolazione di 87 individui tutti abbiano un valore del pH maggiore di 7.35.

Soluzione. La probabilità p che un individuo abbia il pH maggiore di 7.35, rinormalizzando ad una variabile standard Z , è data da:

$$p = P(\text{pH} > 7.35) = P\left(\frac{\text{pH} - 7.40}{0.03} > -1.67\right)$$
$$= P(Z > -1.67) = \Phi(+\infty) - \Phi(-1.67) = 0.5 + \Phi(1.67) = 0.5 + 0.4525 = 0.9525$$

La probabilità che tutti e 87 gli individui abbiano $\text{pH} > 7.35$ è dunque data da

$$p^{87} = 0.9252^{87} = 0.014 = 1.4\%$$