Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2011-2012-Corso A

15 Giugno 2012- **COMPITO 1**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

$\boxed{5 \times 4 = 40}$

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+n^2}{n-5^n}\right) \arctan(n)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos(x))}{\log(1+5x)} \sin(\frac{2}{x})$

(a) 0 (b) 0

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{5^{3x}}{5^{2x}+2(5^x)+1} \, dx$.

$\boxed{5^x = t}$ $\int \frac{t^3}{t^2+2t+1} \cdot \frac{1}{t\log 5} dt = \frac{1}{\log 5} \int \frac{t^2+2t+1}{t^2+2t+1} - \int \frac{2t+1}{t^2+2t+1} =$

$\frac{1}{\log 5}\left[t - \log(t^2+2t+1) - \frac{1}{t+1}\right]$

3. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione, i punti singolari e gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+5} + 4\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

$1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$\lim_{x\to 1^+} f = \frac{1}{6} + 2\pi$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\pi$

$\lim_{x\to 1^-} f = \frac{1}{6} - 2\pi$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\pi$

4. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = (x+5)\, e^{-(x+4)}$. Determinare l'intervallo di convessitá.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{-(x+4)} + (x+5)e^{-(x+4)}(-1) = e^{-(x+4)}[1-x-5] = 0 \Rightarrow x = -4$

f' + (-4) − MAX ASSOLUTO

NO MINIMI

$f''(x) = [-1+(x+4)]\, e^{-(x+4)}$

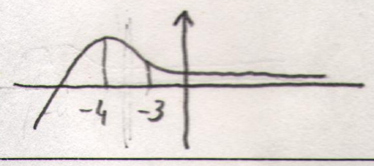
$x > -3$ convessa

$x < -3$ concava

$x = -3$ Flesso

$\lim_{x\to +\infty} f = 0$

$\lim_{x\to -\infty} f = -\infty$



5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2$, definita nell'intervallo $[1, 2]$ e tale che $y(1) = 5$.

$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}$ $\quad z = \frac{1}{y}$ $\quad z(1) = \frac{1}{y(1)} = \frac{1}{5}$

$-z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{x^2} \Rightarrow t' = -\frac{1}{x}t + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t(x) = e^{-\log x}\left[\int e^{\log x}\frac{1}{x^2}\,dt + c\right]$

$= \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{t}\,dt + c\right] = \frac{1}{t}\left[\log t + C\right] \Rightarrow C = \frac{1}{5}$

6. (4 punti) Sapendo che nel lancio di due dadi la somma dei punteggi 8, calcolare la probabilitá che almeno uno dei due dadi abbia il punteggio 4.

E_1 = somme dei due punteggi = 8

E_2 : uno dei due dadi = 4

$P(E_1/E_2) = P(E_2 \cap E_1) / P(E_1)$

8 si ottiene in 5 modi $\begin{pmatrix} 2+6 & 4+4 & 6+2 \\ 3+5 & 5+3 & \end{pmatrix}$

$P(E_1) = \frac{1}{36} \times 5$

$P(E_2 \cap E_1) = (4+4) = 1/36$

$P(E_1/E_2) = \frac{1}{36} \cdot \frac{36}{5} = \frac{1}{5}$

7. (4 punti) Il test per una particolare malattia dá un risultato falso positivo (cioé dá un risultato positivo su un campione sano) con una probabilitá del 2%. Determinare la probabilitá che eseguendo il test su 10 campioni sani si ottengano esattamente due risultati positivi.

$P = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k}$ $\quad a = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ $\quad n = 10$ $\quad k = 2$

$p = \binom{10}{2}\left(1 - \frac{1}{50}\right)^8 \cdot \frac{1}{50}^2 = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 = 1,5\% = 0,015$

8. (8 punti) **Minimi e massimi relativi. Teorema di Fermat.**