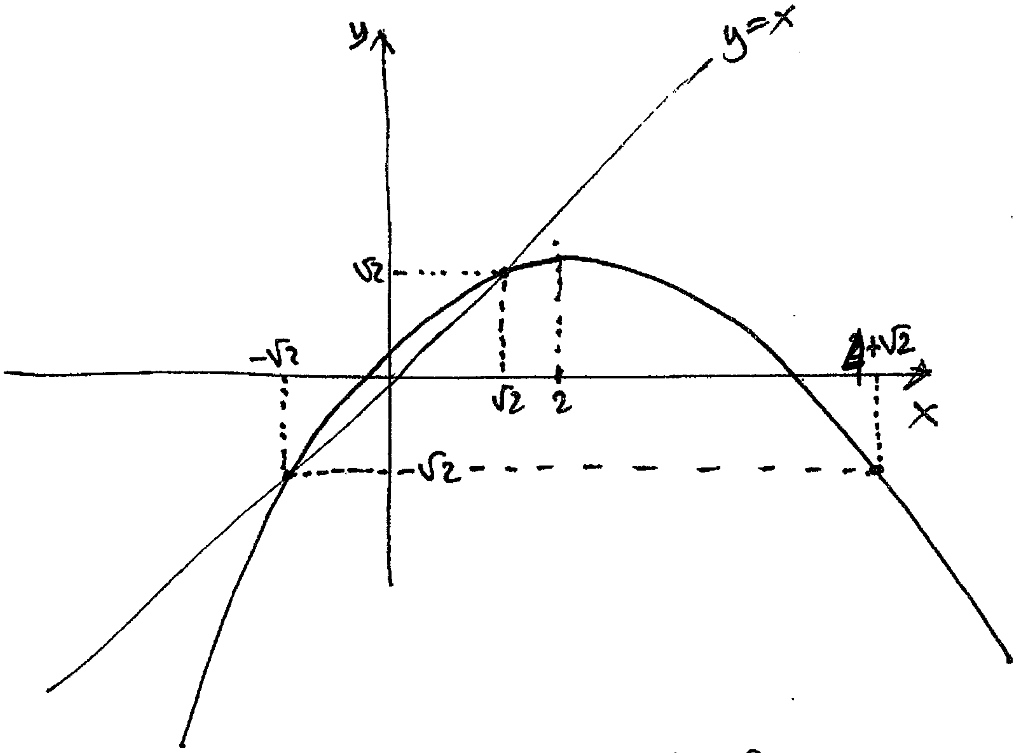
SOLUZIONI COMPITO DEL 14/6/2011.

1. $$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_1 = \alpha \end{cases} \quad \text{con} \quad f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + \frac{1}{2}$$

(a) da un rapido studio della funzione f troviamo il seguente grafico:



In particolare i punti fissi di f sono $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
Consideriamo l'intervallo $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Su questo intervallo f è crescente e $f(x) > x$.
Essendo $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ e $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, f crescente, possiamo concludere che I è invariante. Dunque essendo $\alpha = 0 \in I$ deduciamo che $a_n \in I$ $\forall n$.
Inoltre essendo $f(x) > x$ abbiamo che $\forall n$ $a_{n+1} > a_n$ dunque a_n è crescente. Essendo a_n crescente e limitata ($a_n \in I$), sappiamo che a_n converge: $a_n \to \bar{x}$.
Essendo f continua si deve avere $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dunque $\bar{x} = \pm\sqrt{2}$. Visto però che $a_n > a_1 = \alpha = 0 > -\sqrt{2}$ possiamo escludere che sia $\bar{x} = -\sqrt{2}$ e abbiamo quindi dimostrato che $a_n \to \sqrt{2}$.

b) Suddividiamo la retta reale nei seguenti intervalli

$$\mathbb{R} = \underbrace{I_1}_{(-\infty,-\sqrt{2})} \cup \{-\sqrt{2}\} \cup \underbrace{I_2}_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})} \cup \{\sqrt{2}\} \cup \underbrace{I_3}_{(\sqrt{2},2]} \cup \underbrace{I_4}_{(2,4+\sqrt{2})} \cup \{4+\sqrt{2}\} \cup \underbrace{I_5}_{(4+\sqrt{2},+\infty)}$$

Su I_1 f è crescente, $f(x) < x$. I_1 è invariante.
Dunque se $\alpha \in I_1$ $a_n \in I_1$ $\forall n$, a_n strett. decrescente.

$\Rightarrow a_n \to -\infty$.

- Se $\alpha = -\sqrt{2}$ $a_n = -\sqrt{2}$ $\forall n$, $a_n \to -\sqrt{2}$.
- Su I_2 abbiamo già dimostrato che $a_n \to \sqrt{2}$
- Se $\alpha = \sqrt{2}$ $a_n = \sqrt{2}$ $\forall n$, $a_n \to \sqrt{2}$.
- Su I_3 abbiamo che f è strett. crescente, $f(x) < x$.

$I_3 = (\sqrt{2}, 2]$ $\quad f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $f(2) = \frac{3}{2} \in I_3$

f monotona $\Rightarrow$ $f(x) \in I_3$ $\forall x \in I_3$.

I_3 è quindi invariante, se $\alpha \in I_3$ $a_n \in I_3$ $\forall n$. Essendo $f(x) < x$ a_n risulta decrescente, quindi convergente e l'unica possibilità è $a_n \to \sqrt{2}$.

- Su $I_4 = (2, 4+\sqrt{2})$ f è strett. decrescente.

$f(2) = \frac{3}{2}$, $f(4+\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $f(I_4) \subseteq (-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$

dunque se $a_1=\alpha \in I_4$ si ha che $a_2 \in I_2 \cup \{\sqrt{2}\} \cup I_3$

e quindi, per quanto visto prima, $a_n \to \sqrt{2}$.

- Se $\alpha = 2+\sqrt{2}$ si ha $a_1=\alpha$, $a_2 = f(4+\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$
  $a_n = -\sqrt{2} \quad \forall n>1$. $\quad a_n \to -\sqrt{2}$.

- Se $\alpha \in I_5$ si ha $a_1=\alpha$, $a_2 = f(\alpha) < -\sqrt{2}$
  dunque $a_n \in I_1 \quad \forall n>1$ e $a_n \to -\infty$.

In conclusione abbiamo verificato che $a_n \to \sqrt{2}$

se e solo se $\alpha \in (-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$.

---

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}-2}{x^2 \log(1+x^2)}$$

Ricordiamo che $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.

Dunque: $\sqrt[3]{1+x^2} = (1+x^2)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}x^2 + \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\right)}_{=-\frac{1}{9}}x^4 + o(x^4)$

$\sqrt[3]{1-x^2} = (1-x^2)^{1/3} = 1-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$

Inoltre $\log(1+x) = x+o(x) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2+o(x^2)$.

Dunque:

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}-2}{x^2\log(1+x^2)} = \frac{1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)+1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)-2}{x^2\,(x^2+o(x^2))}$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{-\frac{2}{9}+o(1)}{1+o(1)} \longrightarrow -\frac{2}{9}.$$

3. $$f(x) = x^2 - x \lg x^2 = x(x - \lg x^2)$$

La funzione è definita per $x \neq 0$, in quanto deve essere $x^2 > 0$.

Studiamo il segno di $g(x) = x - \lg x^2$.

si ha $\lim_{x \to 0} x - \lg x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x - \lg x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x - \lg x^2 = -\infty$.

$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

$g(2) = 2 - \lg 4 = 2 - 2\lg 2$
$= 2(1 - \lg 2) > 0$

x		0		2	
$g'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$g(x)$	$-\ 0\ +$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$

$\uparrow$
$\bar{x} < 0$.

Segno di f:

x:		$\bar{x}$		0	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - \lg x^2)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

limiti agli estremi del dominio:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Nel punto 0 si ~~può~~ potrebbe estendere f per continuità.

Non ci sono asintoti obliqui $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \to +\infty$.

N.B. $\lg(x^2) = 2\lg|x|$.

Studio la derivata I e II

$$f'(x) = 2x - \lg x^2 - 2 = 2(x - \lg|x| - 1)$$

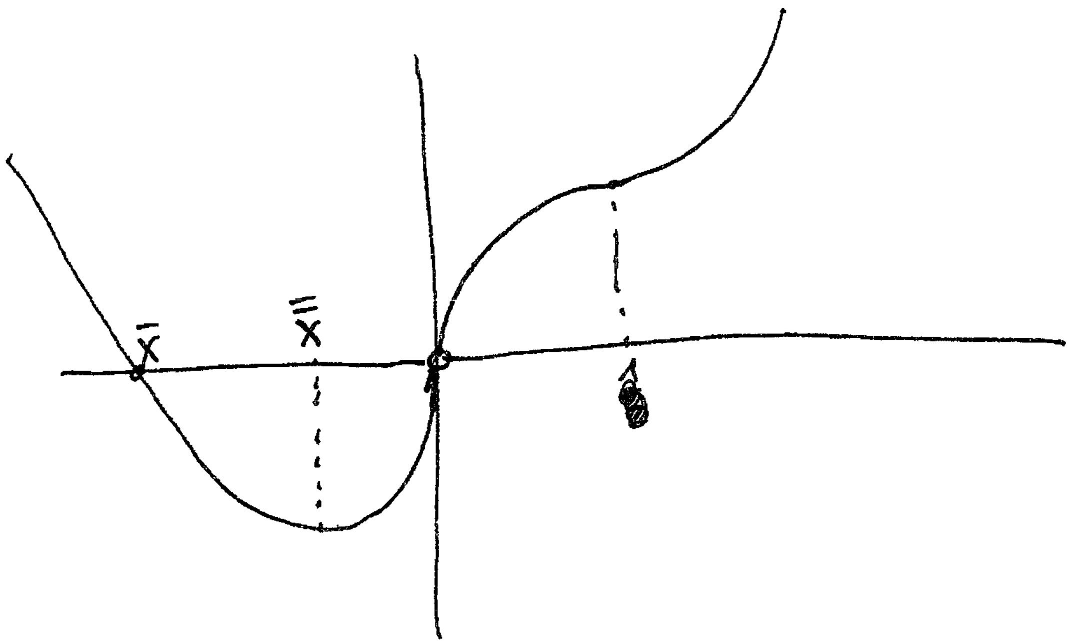
$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2x-2}{x}$$

x:		0		1	
$f''(x)$:	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f'(x)$	$-\ \bar{\bar{x}}\ +$	$\nexists$	$+$	0	$+$
f	$\searrow\ \nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\lg 2 - 2$$
$$= 2\lg 2 - 1 > 0$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$$



4.

$$\int_{-1}^{1}(x^3+\cos x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\int_{-1}^{1}x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,dx+\underbrace{\int_{-1}^{1}\cos x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx}_{=0}$$

Poiché la fn integranda è dispari e l'intervallo $[-1,1]$ è simmetrico.

$$=\int_{-1}^{1}x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

integro per parti

$$\int x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\frac{x^4}{4}\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x^4}{4}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}\,dx=\int\frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}\,dx=\int x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x$$

$$\int_{-1}^{1}x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\mathrm{arctg}\,x\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}-x+\mathrm{arctg}\,x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{3}.$$