1 Trasformate e antitrasformate di Laplace

Ricordiamo intantanto alcune trasformate fondamentali, ricordiamo che siccome la trsformato di Laplace tiene conto solo dei valori della funzione pr t positivo, tutte le funzioni sotto elencate sono da considerarsi nulle per $t \leq 0$. Inoltre nel seguito utilizziamo la convenzione (che è esattamente l'opposta di quella del Barozzi!) di indicare con le lettere maiuscole le funzioni (F, G, $Y, \dots$) e con le lettere minuscole le trasformate (f, g, $y, \dots$).

$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}[F](s)$	Ascissa di convergenza
1	$\frac{1}{s}$	$\sigma(F) = 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sigma(F) = 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma(F) = \mathrm{Re}(a)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sigma(F) = 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\sigma(F) = 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sigma(F) = \lvert a \rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sigma(F) = \lvert a \rvert$

Esercizio 1. *Si provino le formule precedenti.*

Leggendo la precedente tabella al contrario si ottiene le regole per le antitrosfarmate (al solito tutte le antitrasformate sono da considerarsi nulle per $t \leq 0$.)

$f(s)$	$F(t) = \mathcal{L}^{-1}[f](t)$
$\dfrac{1}{s^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh at}{a}$

Ricordiamo inoltre le seguenti proprietà della trasformata di Laplace.

1. $\mathcal{L}[aF(t) + bG(t)] = a\mathcal{L}[F](s) + b\mathcal{L}[G](s)$

2. $\mathcal{L}[F(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[F(t)](s)$

3. $\mathcal{L}[e^{at}F(t)](s) = \mathcal{L}[F(t)](s-a)$

4. $\mathcal{L}[F(ct)](s) = \dfrac{1}{c}\mathcal{L}[F(t)]\left(\dfrac{s}{c}\right)$

5. $\mathcal{L}\left[\dfrac{dF(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[F(t)](s) - F(0)$

6. $\mathcal{L}\left[\dfrac{d^nF(t)}{dt^n}\right] = s^n\mathcal{L}[F(t)](s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$

7. $\mathcal{L}[tF(t)](s) = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[F(t)](s)$

8. $\mathcal{L}[t^nF(t)](s) = (-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[F(t)](s) \quad n \in \mathbb{N}$

9. $\mathcal{L}[F \star G](s) = \mathcal{L}[F](s)\mathcal{L}[G](s)$

10. $\mathcal{L}[\int_0^t F(u)du](s) = \dfrac{\mathcal{L}[F](s)}{s}$

11. Se $F(t)$ è una funzione periodica di periodo T allora
$$\mathcal{L}[F(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} F(t)\, dt.$$

Esercizio 2. *Si provino le formule precedenti*

Svolgimento. Ci limitiamo a provare la (7) e la (10), la (9) è dimostrata più avanti nella sezione dedicata al prodotto di convoluzione.
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tF(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} tF(t)dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\Big(-e^{-st}\Big)F(t)dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \\ &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[F(t)](s)\end{aligned}$$
Per quanto riguarda la (10) sia
$$G(t) = \int_0^t F(u)du,$$
allora dal teorema fondamentale del calcolo
$$\frac{d}{dt}G(t) = F(t) \quad \text{e} \quad G(0) = 0$$
applicando la (5) a G otteniamo
$$\mathcal{L}[F(t)] = s\mathcal{L}[G(t)](s) = s\mathcal{L}\Big[\int_0^t F(u)du\Big](s).$$

•

Esercizio 3. *Sia $F(t) = t^2 \cos t$, si calcoli $\mathcal{L}[F(t)](s)$.*

Svolgimento. Sia $G(t) = \cos t$, allora
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[F(t)](s) = \mathcal{L}[t^2G(t)](s) &= \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[G(t)](s) \\ &= \frac{d^2}{ds^2}\Big(\frac{s}{s^2+1}\Big) = \frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}\end{aligned}$$

•

Leggendo la tabella precedente al contrario otteniamo le proprietà della'antitrasformata, nel seguito elenchiamo solo le più utili.

1. $\mathcal{L}^{-1}[af(s) + bG(s)](t) = a\mathcal{L}^{-1}[(f(s)](t) + b\mathcal{L}^{-1}[g(s)](t)$
2. $\mathcal{L}^{-1}[f(s-a)](t) = e^{at}\mathcal{L}[f(s)](t)$
3. $\mathcal{L}^{-1}[f(s)g(s)](t) = \left(\mathcal{L}^{-1}[f(s)] \star \mathcal{L}[g(s)]\right)(t)$

Esercizio 4. *Si calcolino le antitrasformate di*

1. $f_1(s) = \dfrac{1}{(s-5)^2}$
2. $f_2(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$
3. $f_3(s) = \dfrac{s+3}{s^3}$
4. $f_4(s) = \dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$
5. $f_5(s) = \dfrac{1}{s^2-2s+2}$
6. $f_6(s) = \dfrac{s}{s^2-4s+20}$

Svolgimento. Ricordiamo che tutte le antitrasformate sono da considerarsi nulla per $t \leq 0$.

Utilizzando le proprietà dell'antitrasformata abbiamo, per $s > 5$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-5)^2}\right](t) = e^{5t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = e^{5t}t.$$

Per quanto riguarda la seconda scriviamo

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1}$$

eliminando i denominatori

$$1 = A(s-1) + Bs$$

che calcolato in $s = 1$ e $s = 0$ da' $A = -1$ e $B = 1$, da cui per linearità otteniamo, per $s > 1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right](t) = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) = -1 + e^t.$$

Per la terza abbiamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2}\right](t) = 1 + 3t.$$

Per la quarta

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B}{(s+1)}$$

eliminando i denominatori

$$3s + 7 = A(s+1) + B(s-3)$$

e calcolando per $s = -1$ e $s = 3$ otteniamo $A = 4$ e $B = -1$, da cui

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right](t) = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) = 4e^{3t} - e^{-t}$$

Per la quinta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right](t) = e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t) = e^t \sin t.$$

Una soluzione alternativa poteva essere osservare che

$$s^2 - 2s + 1 = (s - \omega_1)(s - \omega_2)$$

con $\omega_1 = 1 + i$ e $\omega_2 = 1 - i$, quindi

$$\frac{1}{s^2-2s+2} = \frac{A}{(s-\omega_1)} + \frac{B}{(s-\omega_2)}$$

eliminando i denominatori

$$1 = A(s - \omega_2) + B(s - \omega_1)$$

e calcolando per $s = \omega_1$ e $s = \omega_2$ otteniamo

$$A = \frac{1}{2i} \qquad B = -\frac{1}{2i}.$$

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+2}\right](t) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\omega_1}\right](t) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\omega_2}\right](t) = \frac{1}{2i}(e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}).$$

Le due soluzioni danno lo stesso risultato (per fortuna!) in quanto grazie alle formule di Eulero

$$\frac{1}{2i}(e^{\omega_1 t} - e^{\omega_2 t}) = \frac{1}{2i}(e^{(1+i)t} - e^{(1-i)t}) = e^t \Big(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\Big) = e^t \sin t.$$

Per la sesta

$$\frac{s}{s^2 - 4s + 20} = \frac{s}{(s-2)^2 + 16} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 16} + \frac{2}{(s-2)^2 + 16}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s}{s^2 - 4s + 20}\Big](t) =& \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s-2}{(s-2)^2 + 16}\Big](t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{4}{(s-2)^2 + 16}\Big](t) \\
=& e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s}{s^2 + 16}\Big](t) + \frac{1}{2}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{4}{s^2 + 16}\Big](t) \\
=& e^{2t}\cos(4t) + \frac{1}{2}e^{2t}\sin(4t)
\end{aligned}$$

•

2 Il prodotto di convoluzione

Date due funzioni F e G nulle per valori negativi di t si definisce il *prodotto di convoluzione* tra F e G come la funzione definita da:

$$F \star G\,(t) = \int_0^\infty F(t-u)G(u)du = \int_0^t F(t-u)G(u)du$$

dove nell'ultima uguglianza abbiamo usato il fatto che se $u \geq t$ allora $t - u \leq 0$ e quindi $F(t-u) = 0$. Osserviamo che se $t \leq 0$ allora

$$F \star G\,(t) = \int_0^\infty F(t-u)G(u)du = \int_0^t F(t-u)G(u)du = -\int_t^0 F(t-u)G(u)du = 0$$

in quanto $G(u) = 0$ per valori negativi di u. Di conseguenza $F \star G\,(t) = 0$ per valori negativi di t

Esercizio 5. *Si provi che $F \star G\,(t) = G \star F\,(t)$.*

Svolgimento. Con il cambio di variabile $z = t - u$ che implica

$$\begin{cases} u = t - z \\ du = -dz \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned}F\star G\,(t) &= \int_{u=0}^{u=t} F(t-u)G(u)du = -\int_{z=t}^{z=0} F(z)G(t-z)dz \\ &= \int_{z=0}^{z=t} F(z)G(t-z)dz = G\star F\,(t)\end{aligned}$$

•

Esercizio 6. *Si provi che $F\star(G\star H) = (F\star G)\star H$, ossia che non conta l'ordine in cui si esegue il prodotto di convoluzione.*

Svolgimento. È una noiosa applicazione del teorema di Fubini. •

Esercizio 7. *Sia*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \textit{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli $H\star H\,(t)$, $H\star H\star H\,(t)$ e $H\star F\,(t)$ dove

$$F(t) = \begin{cases} e^t & \textit{se } t \geq 0 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Svolgimento. Osserviamo che tutte le convoluzioni saranno nulle per $t \leq 0$, per t positivo invece abbiamo:

$$H\star H(t) = \int_0^t H(t-u)H(u)du = \int_0^t H(t-u)du = \int_0^t du = t$$

dove abbiamo usato che se $0 \leq u \leq t$ allora $H(u) = 1$ e $H(t-u) = 1$ in quanto $t-u \geq 0$.

$$\begin{aligned}H\star H\star H\,(t) = H\star(H\star H)\,(t) &= \int_0^t H\star H\,(t-u)H(u)du \\ &= \int_0^t (t-u)du = \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

grazie alla proprietá associativa della convoluzione.

$$H\star F(t) = \int_0^t F(t-u)H(u)du = \int_0^t e^{t-u}du = e^t\int_0^t e^{-u}du = e^t(1-e^{-t}) = e^t - 1.$$

•

Esercizio 8. *Sia*

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \textit{se } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli $F \star F\,(t)$.

Svolgimento. Dobbiamo calcolare

$$F \star F\,(t) = \int_0^t F(t-u)F(u)du.$$

Osserviamo che se $t \le 0$ o $t \ge 2$ allora $F \star F(t) = 0$, infatti nel primo caso questo discende dalle proprietá del prodotto di convoluzione giá osservate, mentre nel secondo caso si ha che o $u \ge 1$, caso in cui $F(u) = 0$, o $u \le 1$ ma allora $t - u \ge 2 - 1 = 1$ e quindi $F(t-u) = 0$. Possiamo quindi limitarci a considerare $0 \le t \le 2$. Abbiamo che

$$F \star F\,(t) = \int_0^t F(t-u)F(u)du = \int_0^{\min\{t,1\}} F(t-u) = \int_{\max\{t-1,0\}}^{\min\{t,1\}} 1du.$$

Dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato che se $u > 1$ allora $F(u) = 0$ mentre se $0 \le u \le 1$ allora $F(u) = 1$ e nell'ultima il fatto che $F(t-u)$ è uguale ad 1 se $t - u \in [0,1]$ e ad 0 altrimenti e che $0 \le t - u \le 1$ se e solo se $t - 1 \le u \le t$.

Distinguiamo due casi:

1. Se $0 \le t \le 1$ allora $\min\{1,t\} = t$ e $\max\{t-1,0\} = 0$ e quindi

$$F \star F\,(t) = \int_0^t du = t$$

2. Se $1 \le t \le 2$ allora $\min\{1,t\} = 1$ e $\max\{t-1,0\} = t-1$ e quindi

$$F \star F\,(t) = \int_{t-1}^1 du = 2 - t.$$

In definitiva

$$F \star F\,(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 0 \\ t & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ 2-t & \text{se } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{se } t \ge 2. \end{cases}$$

•

Esercizio 9. *Si mostri la seguente proprietá fondamentale della trasformata di Laplace:*

$$\mathcal{L}[F \star G](s) = \mathcal{L}[F](s)\mathcal{L}[G](s)$$

Ossia la trasformata del prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate.

Svolgimento. Sia

$$A := \{(u,t)|\ t \in [0,\infty)\ u \in [0,t)\} = \{(u,t)|\ u \in [0,\infty)\ t \in [u,\infty)\}$$

allora

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[F \star G](s) &= \int_0^\infty e^{-st} F \star G\,(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \Big(\int_0^t F(u-t)G(u)du \Big) dt \\
&= \iint_A e^{-st} F(u-t)G(u) du dt \\
&= \iint_A e^{-s(u-t)} F(u-t) e^{-su} G(u) du dt \\
&= \int_0^\infty \Big(\int_u^\infty e^{-s(t-u)} F(t-u) dt \Big) e^{-su} G(u) du \\
&= \Big(\int_0^\infty e^{-su} G(u) du \Big) \Big(\int_0^\infty e^{-sz} F(z) dz \Big) \\
&= \mathcal{L}[F](s)\mathcal{L}[G](s)
\end{aligned}$$

Dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il Teorema di Fubini, nella quarta che $e^{-st} = e^{-s(t-u)}e^{-su}$, nella quinta nuovamente il teorema di Fubini e la definizione di A, infine nella sesta, il cambio di variabile $z = t - u$ che implica

$$\int_u^\infty e^{-s(t-u)} F(t-u) dt = \int_0^\infty e^{-sz} F(z) dz.$$

•

3 Applicazioni alle equazioni differenziali

Consideriamo una EDO lineare a coefficienti costanti

$$\begin{cases} a_n Y^{(n)} + a_{n-1} Y^{(n-1)} + \cdots + a_0 Y = F(t) \\ Y(0) = A_0,\ Y'(0) = A_1 \ldots, Y^{(n-1)} = A_{n-1} \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione è possibile ottenere, grazie alla relazione tra la trasformata di una funzione e della sua derivata, una espressione esplicita per la trasformata della soluzione. Nel caso in cui si sia in grado di antitrasformare si ottiene esplicitamente la soluzioni, anche se questo non fosse possibile si possono tuttavia ricavare informazioni utili sulla soluzione. Vediamo alcuni esercizi.

Esercizio 10. *Si calcoli $Y(t)$ soluzione di*

$$\begin{cases} Y'' - 2Y' - 3Y = 0 \\ Y(0) = 3 \quad Y'(0) = 13 \end{cases}$$

Svolgimento. Trasformando entrambi i membri si ottiene

$$\mathcal{L}[Y''](s) - 2\mathcal{L}[Y'](s) - 3\mathcal{L}[Y](s) = 0$$

siccome

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Y''](s) &= s^2\mathcal{L}[Y](s) - sY(0) - Y'(0) = s^2\mathcal{L}[Y](s) - 3s - 13 \\ \mathcal{L}[Y'](s) &= s\mathcal{L}[Y](s) - Y(0) = s\mathcal{L}[Y](s) - 3 \end{aligned}$$

si ottiene, denotando con $y(s) = \mathcal{L}[Y](s)$,

$$(s^2 - 2s - 3)y(s) - 3s - 13 + 6 = 0$$

da cui

$$y(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$$

quindi, per quanto già visto:

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)](t) = 4e^{3t} - e^{-t}.$$

•

Esercizio 11. *Si calcoli $Y(t)$ soluzione di*

$$\begin{cases} Y'' + 2Y' + Y = 1 \\ Y(0) = 1 \quad Y'(0) = 2 \end{cases}$$

e si dica quanto vale

$$\int_0^\infty e^{-t}Y(t)dt.$$

Svolgimento. Denotiamo con $y(s) = \mathcal{L}[Y](s)$ e trasformiamo la precedente equazione per ottenere

$$s^2y(s) + 2sy(s) + y(s) - s - 4 = \frac{1}{s}$$

da cui

$$(s+1)^2y(s) = s + 4 + \frac{1}{s}$$

e quindi

$$y(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2} + \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{s}$$

da cui

$$s^2 + 4s + 1 = As + Bs(s+1) + C(s+1)^2$$

che calcolata in $s = -1$ e $s = 0$ da $A = 2$ e $C = 1$, per trovare B un modo è derivare la precedente equazione e ottenere:

$$2s + 4 = A + Bs + B(s+1) + 2C(s+1)$$

che per $s = -1$ da

$$B = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[y(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2}{(s+1)^2}\Big](t) + \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s}\Big](t) \\
&= 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s^2}\Big](t) + 1 \\
&= 2te^{-t} + 1
\end{aligned}$$

Il modo piu' veloce per calcolare l'integrale richiesto è osservare che

$$\int_0^\infty e^{-t}Y(t)dt = \mathcal{L}[Y](1) = \frac{s^2+4s+1}{(s+1)^2 s}\Big|_{s=1} = \frac{3}{2}$$

•

Esercizio 12. *Data l'equazione*

$$\begin{cases} Y''' + Y = 0 \\ Y(0) = 0 \quad Y'(0) = 0 \quad Y''(0) = 1 \end{cases}$$

si calcoli

$$\int_0^\infty tY(t)dt$$

Svolgimento. Abbiamo che, denotando $y(s) = \mathcal{L}[Y](s)$

$$\int_0^{\infty} tY(t) = \mathcal{L}[tY(t)](0) = -\frac{dy(s)}{ds}\Big|_{s=0}$$

grazie a proprietà note. Trasformando l'equazione otteniamo

$$(s^3+1)y(s) - 1 = 0$$

da cui $y(s) = \frac{1}{s^3+1}$, l'integrale voluto è quindi uguale a 0. •

Esercizio 13. *Si consideri l'equazione*

$$\begin{cases} Y'' + \omega^2 Y = F(t) \\ Y(0) = A \quad Y'(0) = B \end{cases}$$

e se ne trovi una soluzione generale.

Svolgimento. Denotiamo $y(s) = \mathcal{L}[Y](s)$ e $f(s) = \mathcal{L}[F](s)$ e trasformiamo l'equazione per ottenere

$$(s^2+\omega^2)y(s) = f(s) + As + B$$

da cui

$$y(s) = \frac{f(s)}{s^2+\omega^2} + \frac{As}{s^2+\omega^2} + \frac{B}{s^2+\omega^2}.$$

antitrasformando si ha

$$\begin{aligned} Y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2}\Big](t) + A\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+\omega^2}\Big](t) + \frac{B}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2}\Big](t) + A\cos(\omega t) + \frac{B}{\omega}\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Osserviamo che la soluzione è scritta come $Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$, dove

$$Y_1(t) = A\cos(\omega t) + \frac{B}{\omega}\sin(\omega t)$$

è la soluzione dell'equazione omogenea e

$$Y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2}\Big](t)$$

che vedremo ora essere soluzione particolare, infatti grazie alle proprietà della convoluzione abbiamo che

$$Y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2}\Big](t) = \Big(\mathcal{L}^{-1}[f(s)] \star \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+\omega^2}\Big]\Big)(t) = \int_0^t F(t-u)\frac{\sin\omega u}{\omega}du$$

in quanto

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+\omega^2}\Big](t) = \frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

•