Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

11 settembre 2010

1. Si consideri la successione di funzioni
$$f_k(x) = x^k \sin(k\pi x).$$
Dire se la successione converge uniformemente sugli intervalli: $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ e $[1, 2]$.

   Soluzione. Osserviamo che per $x \geq 0$ si ha
$$|f_k(x)| = x^k |\sin(k\pi x)| \leq x^k$$
e dunque
$$\sup_{x\in[0,a]} |f_k(x)| \leq a^k \to 0$$
se $a < 1$. Dunque la successione converge uniformemente a zero in tutti gli intervalli del tipo $[0, a]$ con $a < 1$, e in particolare sull'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$.

   Per quanto visto prima, il limite puntuale della successione $f_k(x)$ sull'intervallo $[0, 1)$ è $f(x) = 0$. Inoltre per $x = 1$ si ha $f_k(1) = 0$ e dunque il limite puntuale è $f(x) = 0$ su tutto l'intervallo chiuso $[0, 1]$.

   Per dimostrare che sull'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ non c'è convergenza uniforme, è sufficiente trovare, per ogni k un punto x_k in cui la funzione f_k sia "sufficientemente" grande. Converrà, ad esempio, scegliere il punto x_k vicino a 1 in cui $|\sin(k\pi x)|$ assume valore massimo, cioè $x_k = \frac{2k-1}{2k}$ cosicchè $|\sin(k\pi x_k)| = |\sin((2k-1)\pi/2)| = |\sin(2k\pi - \pi/2)| = |-1| = 1$. In tal caso si ha
$$\sup_{x\in[1/2,1]} |f_k(x)| \geq |f_k(x_k)| = x_k^k |\sin(k\pi x_k)|$$
$$= x_k^k = \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^k \to e^{-1/2} > 0.$$

Questo significa che la successione non converge uniformemente sull'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$.

Discorso analogo si può fare sull'intervallo $[1, 2]$ anche se in questo caso non sappiamo quale sia (se esiste) il limite puntuale $f(x)$. Supponiamo per assurdo che ci sia convergenza uniforme verso una certa funzione $f(x)$. Scegliendo $x_k = \frac{4k-1}{2k}$ si ha

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[1,2]} |f_k(x) - f(x)| &\geq |f_k(x_k) - f(x_k)| \geq |f_k(x_k)| - |f(x_k)| \\ &= x_k^k - |f(x_k)|.\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che per $k \to \infty$ si ha $x_k \to 2$ e quindi $x_k^k \to +\infty$. Visto che stiamo supponendo che f sia il limite uniforme delle f_k, che sono continue, anche f dovrebbe essere continua. Si ottiene quindi

$$\sup_{x\in[1,2]} |f_k(x) - f(x)| \to +\infty - f(2) = +\infty$$

che è assurdo in quanto tale limite dovrebbe essere 0 se ci fosse convergenza uniforme.

Concludiamo quindi che sull'intervallo $[1, 2]$ non c'è convergenzuniforme.

2. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx$$

Soluzione. Ricordando che $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ abbiamo

$$\frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{e^{ix}}{x^2+1} - i\frac{\sin x}{x^2+1}.$$

Osserviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\, dx = 0$$

in quanto la funzione integranda è sommabile ma dispari. Si ha dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx.$$

Quest'ultimo integrale lo possiamo risolvere applicando il Lemma di Jordan, infatti è facile verificare che le ipotesi sono soddisfatte. Dunque è sufficiente calcolare il residuo della funzione in $x = i$, dove c'è un polo semplice. Con un semplice calcolo si trova

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2}$$

e dunque l'integrale cercato è dato da

$$2\pi \operatorname{Res} = \frac{\pi}{e}.$$

3. Determinare tutte (tutte!) le soluzioni del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che $y = 0$ è soluzione dell'equazione. Ma visto che la funzione $f(y) = \sqrt[3]{y}$ non è lipschziana, potrebbero esserci altre soluzioni. Dove le soluzioni sono diverse da zero, posso scrivere

$$\frac{y'}{\sqrt[3]{y}} = 1$$

da cui

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x - c$$

(mettiamo un segno meno davanti alla costante c per comodità nei conti successivi) ovvero

$$y = \pm\sqrt{\frac{8}{27}(x-c)^3}.$$

Tale soluzione è definita per $x > c$ e si annulla (con la derivata) per $x = c$. Dunque al variare di $c \geq 0$ posso trovare due fasci di soluzioni del problema di Cauchy:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq c \\ \pm\sqrt{\frac{8}{27}(x-c)^3} & \text{per } x > c. \end{cases}$$

4. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t}\, dt.$$

Soluzione. Posto

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right](s)$$

l'integrale cercato non è altro che $F(1)$. Per calcolare $F(s)$ ricordiamo che

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s) = \mathcal{L}[\cos t - 1](s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s}.$$

Integrando otteniamo:

$$F(s) = \frac{1}{2}\log(s^2+1) - \log(s) + c = \log\frac{\sqrt{s^2+1}}{s} + c.$$

Ricordando poi che $F(s) \to 0$ se $\operatorname{Re} s \to +\infty$, deve essere $c = 0$. Dunque

$$F(1) = \log\sqrt{2} = \frac{\log 2}{2}.$$