Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

5 giugno 2010

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = x^2 \operatorname{arctg}(kx).$$

Trovare il limite puntuale. Dimostrare che su tutto $\mathbb{R}$ non c'è convergenza uniforme. Dimostrare che c'è convergenza uniforme sugli intervalli limitati $[-M, M]$.

Soluzione. Per calcolare il limite bisogna distinguere in base al segno di x. Si trova infatti

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2}x^2 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} |f_x(x) - f(x)| = \lim_{x\to+\infty} x^2(\operatorname{arctg}(kx) - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(kx) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x^2}}$$
$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{k}{1+k^2x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = -\infty$$

e quindi non ci può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora la convergenza nell'intervallo limitato $[-M, M]$. Osserviamo innanzitutto che per motivi di simmetria possiamo considerare solo l'intervallo $[0, M]$. In tal caso si può stimare

$$g(x) = |f(x) - f_k(x)| = x^2(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(kx))$$
$$\leq \begin{cases} \frac{1}{k}\frac{\pi}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \\ M^2(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{k}) & \text{se } \frac{1}{\sqrt{k}} \leq x \leq M \end{cases}$$

e vediamo quindi che c'è convergenza uniforme, visto che entrambe le espressioni, nell'ultima disuguaglianza, tendono a zero in k e non dipendono da x.

2. Dopo aver disegnato l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}$$

trovare il valore massimo e minimo assunti su D dalla funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^3.$$

Soluzione. L'insieme è un quadrato di vertici $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Innanzitutto cerchiamo eventuali punti critici interni a D. Si ha

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 3y^2$$

dunque l'unico punto critico è il punto $(0, 0)$ che effettivamente è interno al dominio D. Osserviamo però che $f(0, y) = y^3$ non ha né massimo né minimo in 0. Dunque $(0, 0)$ non è né massimo né minimo.

Guardiamo ora cosa succede sui lati del quadrato D. Osserviamo innanzitutto che la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle y, e dunque basterà considerare i due lati contenuti nel semipiano $x \geq 0$.

Sul lato $y = 1 - x$, $x \in [0, 1]$ si ha

$$g(x) = f(x, 1 - x) = x^2 + (1 - x)^3$$

da cui

$$g'(x) = 2x - 3(1 - x)^2 = -(3x^2 - 8x + 3)$$

che si annulla nei punti

$$x_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

ed è positiva per valori compresi tra x_1 e x_2. Osserviamo ora che $x_1 \in (0, 1)$ mentre $x_2 > 1$. Dunque x_1 è un punto di locale per $g(x)$. Notiamo però che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ in quanto $x^2 \geq 0$ e $1 - x \geq 0$. Dunque $f(x_1, 1 - x_1) \geq 0$ non può essere un minimo assoluto in quanto si ha $f(0, -1) = -1 < 0$. I valori $g(0) = f(0, 1) = 1$ e $g(1) = f(1, 0) = 1$ sono invece candidati massimi.

Sul lato $y = x - 1$, $x \in [0, 1]$ si ha

$$h(x) = f(x, x - 1) = x^2 + (x - 1)^3$$

e quindi

$$h'(x) = 2x + 3(x - 1)^2 = 3x^2 - 4x + 3.$$

Calcolando il discriminante del polinomio di secondo grado si osserva che $h'(x) \geq 0$ per ogni x. Dunque la funzione $h(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$ ha minimo in $x = 0$ e massimo in $x = 1$. I corrispondenti valori sono $f(0, -1) = h(0) = -1$ e $f(1, 0) = h(1) = 1$.

In conclusione il valore massimo assunto da f su D si ha nei punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, 1)$ ed è 1. Il valore minimo si ha nel punto $(0, -1)$ ed è -1.

3. Disegnare sul piano complesso la curva

$$\gamma(t) = \sin t - i \sin(2t), \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

e calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{4z^2 - 1}\, dz.$$

Soluzione. La funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{1}{4z^2 - 1}$$

ha due poli semplici nei punti $z = \pm\frac{1}{2}$. Studiando la parte reale ed immaginaria della curva γ si riesce a capire che tale curva ha la forma di un "otto" che compie un giro in senso antiorario intorno al polo $z = \frac{1}{2}$ e compie un giro in senso orario intorno al polo $z = -\frac{1}{2}$. Dunque si ha

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f, \frac{1}{2}) - \mathrm{Res}(f, -\frac{1}{2})).$$

È poi facile calcolare

$$\mathrm{Res}(f, \pm\frac{1}{2}) = \left.\frac{1}{8z}\right|_{z=\pm\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{4}.$$

In conclusione l'integrale richiesto vale $2\pi i(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \pi i$.

4. Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) + y''(t) = t^2 \\ y''(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare

$$\int_0^\infty e^{-t} y(t)\, dt.$$

Soluzione. Passando alle trasformate di Laplace l'equazione diventa

$$s^3 Y(s) - 1 + s^2 Y(s) = \frac{2}{s^3}$$

da cui

$$(s^3 + s^2) Y(s) = \frac{2}{s^3} + 1$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{2 + s^3}{s^3 (s^3 + s^2)}.$$

L'integrale richiesto non è altro che $Y(1) = \frac{3}{2}$.