Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

28 maggio 2010

1. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^4-1}\,dz$$
dove $\gamma(t)$ è la curva chiusa $\gamma(t) = 2 + \frac{5}{2}e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

   Soluzione. La funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4-1}$ è olomorfa ed ha 4 poli semplici nei punti $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$. Di questi quattro poli solo 1, i e $-i$ sono contenuti nella curva γ che è una circonferenza centrata nel punto 2 di raggio $\frac{5}{2}$. Per il teorema dei residui l'integrale richiesto è dunque dato da
$$2\pi i\big[\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i)\big].$$
   Per semplificare il calcolo possiamo però osservare che la funzione soddisfa il lemma del grande cerchio, dunque la somma di tutti e quattro residui è nulla. Dunque è sufficiente calcolare il residuo nell'unico punto esterno alla curva:
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i) &= -\operatorname{Res}(f,-1)\\ &= \frac{z^2}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=-1} = \frac{z^4}{4z}\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$
   L'integrale richiesto è dunque dato da:
$$-2\pi i\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{\pi}{2}i.$$

2. Calcolare $\operatorname{Res}(f,0)$ per la funzione
$$f(z) = \frac{\cos z}{(e^z-1)^2}.$$

Soluzione. Ricordiamo che

$$\cos z = 1 + o(z)$$
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)$$

da cui possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1 + o(z)}{(z + \frac{z^2}{2} + o(z^2))^2} = \frac{1 + o(z)}{z^2 + z^3 + o(z^3)}.$$

Dalla precedente scrittura risulta chiaro che per $z \to 0$ si ha $z^2 f(z) \to 1$ e quindi $z_0 = 0$ è un polo di ordine 2. Per calcolare il residuo possiamo ricavare i primi due coefficienti nella formula di Laurent di f. Si ha:

$$f(z) = \frac{1 + o(z)}{z^2 + z^3 + o(z^3)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + o(\frac{1}{z})$$

da cui

$$1 + o(z) = (A + Bz + o(z))(1 + z + o(z)) = A + (A + B)z + o(z)$$

e quindi $A = 1$ e $A + B = 0$ da cui $B = -1$. Dunque

$$\mathrm{Res}(f, 0) = B = -1.$$

3. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = |\sin t|.$$

Soluzione. La funzione $f(t)$ è periodica di periodo $T = \pi$. Dunque possiamo usare la formula per la trasformata delle funzioni periodiche:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} \sin(t)\, dt$$

visto che in $[0, \pi]$ si ha $|\sin(t)| = \sin(t)$.

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-st} \sin(t)\, dt &= \mathcal{L}[\sin(t) - \chi_{[\pi,+\infty)}(t) \sin(t)](s) \\ &= \mathcal{L}[\sin(t)](s) - e^{s\pi} \mathcal{L}[\sin(t + \pi)](s) \\ &= \mathcal{L}[\sin(t)](s) - e^{s\pi} \mathcal{L}[-\sin(t)](s) \\ &= \frac{1}{1 + s^2}(1 + e^{-\pi s}).\end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(1 + s^2)(1 - e^{-\pi s})}.$$

4. Risolvere

$$\begin{cases} y''' + 2y'' + 2y' = e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1. \end{cases}$$

Soluzione. Passando alle trasformate di Laplace si ha:

$$\begin{aligned} s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) \\ +2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

cioè

$$(s^3 + 2s^2 + 2s)Y(s) = \frac{1}{s+1} + 1 + s = \frac{s^2 + 2s + 2}{s+1}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s^3 + 2s^2 + 2s)} = \frac{1}{(s+1)s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[e^{-t}](s).$$

Dunque

$$y(t) = 1 - e^{-t}.$$