Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

16 aprile 2010

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) La funzione è differenziabile nel punto $(0,0)$?

   (b) In quali punti dell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^4 + y^4 \leq 1\}$$

   la funzione assume il valore massimo?

Soluzione. Visto che $f(x,0) = 0$ e $f(0,y) = 0$ deve essere $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. Per verificare se la funzione è differenziabile in $(0,0)$, dobbiamo considerare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

tale limite non esiste, infatti facendo la sostituzione $x = y$ si ottiene

$$\frac{x^5}{2\sqrt{2}x^4|x|} \to \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dunque la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Per quanto riguarda il punto (b), si può verificare che la funzione ha punti critici solo sugli assi cartesiani: $x = 0$ e $y = 0$. In tutti questi punti la funzione vale 0. Questi sono i candidati massimi all'interno del dominio.

Dobbiamo allora considerare candidati massimi sulla frontiera. Visto che sulla frontiera $x^4 + y^4 = 1$ la funzione f coincide con $g(x, y) = x^3y^2$. Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla g = \lambda \nabla(x^4 + y^4) \\ g = 1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 3x^2y^2 = \lambda 4x^3 \\ 2x^3y = \lambda 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

che risolto ci dà $x = \pm\sqrt[4]{4/5}$, $y = \pm\sqrt[4]{8/15}$. Nei due punti $(\sqrt[4]{4/5}, \pm\sqrt[4]{8/15})$ la funzione assume lo stesso valore, positivo, che necessariamente è il valore massimo visto che negli altri due punti la funzione assume valore negativo e nei punti trovati in precedenza assumeva il valore zero.

2. Si consideri la curva $\gamma\colon [-3, 3] \to \mathbb{R}^2$ definita dalle equazioni parametriche $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = t(9 - t^2) \\ y(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 4). \end{cases} \qquad t \in [-3, 3].$$

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Soluzione. La forma differenziale è chiusa ma non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. La curva γ è chiusa, in quanto $\gamma(3) = \gamma(-3)$. Inoltre possiamo osservare che γ non interseca mai il semiasse $x = 0$, $y \leq 0$ infatti $x(t) = 0$ solo per $t = 0$, $t = \pm 3$ e in questi punti si ha $y(t) > 0$. Ora possiamo affermare che ω è esatta se la restringiamo al piano tolto il semiasse $x = 0$, $y \leq 0$, infatti in tale regione una primitiva è data dalla funzione $f(x, y)$ che restituisce l'angolo del punto (x, y) compreso tra $-\pi/2$ e $\frac{3}{2}\pi$. Dunque possiamo concludere che l'integrale in questione è zero.

3. Calcolare

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^k}\,dx.$$

Soluzione. Posto

$$f_k(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^k}$$

osserviamo che sull'intervallo $[0, \pi]$ si ha $\sin x \geq 0$ e quindi $(2+\sin x)^k \geq 2^k$. Inoltre sappiamo che $|\cos x| \leq 1$. Dunque

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}$$

che significa che la serie $\sum_k f_k$ è totalmente convergente. Dunque possiamo scambiare la somma con l'integrale. Inoltre abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos x}{(2+\sin x)^k} = \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+\sin x}\right)^k = \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{2+\sin x}}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato la formula per la somma della serie geometrica. Ora dobbiamo calcolare

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{2+\sin x}}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos x(2+\sin x)}{1+\sin x}\, dx$$

facendo il cambio di variabile $y = \sin x$, $dy = \cos x\, dx$ si osserva che gli estremi di integrazione diventano uguali, in quanto $\sin \pi = \sin 0 = 0$. Dunque il risultato è zero.

4. Studiare qualitativamente le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 - 4y, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare del parametro $y_0 \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di una equazione autonoma. Osserviamo che $y = 0$, $y = 2$ e $y = -2$ sono soluzioni costanti. Per il teorema di esistenza e unicità le altre soluzioni non possono intersecare queste tre rette.

Per $y_0 \in (0, 2)$ la soluzione è strettamente decrescente. Essendo limitata tra le due soluzioni costanti $y = 0$ e $y = 2$ deve necessariamente avere esistenza globale. Essendo monotona la soluzione ammette limite per $x \to \pm\infty$, e tale limite deve essere compreso nell'intervallo $[0, 2]$. Ma se $y \to \bar{y}$ per $x \to \pm\infty$, si ha $y' \to \bar{y}^3 - 4\bar{y}$. Tale limite deve necessariamente essere zero e quindi $\bar{y}$ sarà 0 o ± 2. Dalla monotonia della soluzione si deduce che per $x \to +\infty$ si ha $y(x) \to 0$ e per $x \to -\infty$ si ha $y(x) \to 2$.

Se $y_0 > 2$ la soluzione risulta essere strettamente crescente. Per $x < 0$ la soluzione è limitata dal basso dalla soluzione $y = 2$ e quindi ha esistenza fino a $x \to -\infty$ dove la soluzione ha come asintoto $y = 2$. Per $x > 0$ la soluzione non può avere un asintoto orizzontale, perché tale asintoto potrebbe essere solo $y = 2$ cosa che è in contraddizione con la monotonia della funzione. Dunque la soluzione non è limitata. Possiamo dimostrare che la soluzione ha un asintoto verticale, infatti si ha $y^3 - 4y \gg y^2$ nel senso che per y abbastanza grande si ha $y^3 - 4y > y^2$. Siccome effettivamente la soluzione $y(x)$ diventa grande a piacere (non è limitata) la condizione $y^3 - 4y > y^2$ sarà verificata da un certo punto in poi. Da quel punto, i risultati di confronto ci garantisco l'esistenza di un asintoto verticale, visto che l'equazione $y' = y^2$ ha in effetti un asintoto verticale.

Per $y_0 < 0$ i comportamenti qualitativi sono simmetrici. In effetti è facile verificare che se $y(x)$ è una soluzione della nostra equazione, allora anche $z(x) = -y(x)$ é soluzione.