

Analisi Matematica 2

Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

9 settembre 2010

1. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = |x - y|y^2.$$

In quali punti tale funzione è differenziabile?

2. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^3 + y^6.$$

Dimostrare che il punto $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto per f su \mathbb{R}^2 .

3. Si consideri la curva $\gamma: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita dalle equazioni parametriche $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = t(9 - t^2) \\ y(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 4). \end{cases} \quad t \in [-3, 3].$$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

4. Disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 - 2xy^2 \\ y(2) = 2. \end{cases}$$

In particolare dimostrare che $y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e determinare $\lim y(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.