

Analisi Matematica 2

Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

13 luglio 2010

1. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-n^2 x^2}.$$

- (a) Studiare la convergenza totale sull'intervallo $[1, +\infty)$.
(b) Dimostrare che non c'è convergenza totale sull'intervallo $[0, 1]$.
(c) Dimostrare che non c'è convergenza uniforme sull'intervallo $[0, 1]$ (ad esempio mostrando che la funzione somma non è continua in $x = 0$)
2. Determinare i punti di massimo e i punti di minimo relativo della funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^{10}y^4 + \frac{1}{12}y^{12} - x^{10} - 5y.$$

3. Risolvere i due seguenti problemi di Cauchy:

$$(a) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Inoltre stabilire se nel caso (b) sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale.

4. Nel riferimento cartesiano x, y, z calcolare il volume del solido delimitato dal grafico della funzione (paraboloide)

$$f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$$

e dal piano coordinato di equazione $z = 0$.