

Analisi Matematica 1

Prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

25 settembre 2009

1. Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n(1 + e^{-a_n}), \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} \right) \log(x^\alpha + e^{\alpha x}).$$

3. Calcolare

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \frac{x}{\alpha + x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Posto

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{arctg} t} - \frac{1}{t} dt$$

- (a) studiare la funzione $F(x)$;
- (b) dire se per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $F(x)$ ha un asintoto obliquo.

5. Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \left[\left(\cos \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$