

# Analisi Matematica 1

## Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

\*AA\*\*A\*\*

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 - \cos a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha. \end{cases}$$

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Dire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2 \log(1 + x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x - e^x + x^2.$$

Dimostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x$  nell'intervallo  $(-\delta, 0)$  si ha  $f(x) > 0$ .

4. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^n)^n + n^{(2^n)}}{2^{(n!)} + (n!)^2}$$

è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}} dx.$$

- (a) mostrare che l'integrale è finito;  
(b) calcolarne il valore.

---

**N.B.** Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

# Analisi Matematica 1

## Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

\*BB\*\*B\*\*

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 + \cos a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha. \end{cases}$$

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Dire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2 \log(1 + x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x - \sin x - \cos x - x^2.$$

Dimostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x$  nell'intervallo  $(-\delta, 0)$  si ha  $f(x) < 0$ .

4. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (n^n)^n}{n^{(2^n)} + 2^{(n!)}}$$

è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}} dx.$$

- (a) mostrare che l'integrale è finito;  
(b) calcolarne il valore.

---

**N.B.** Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

# Analisi Matematica 1

## Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

\*CC\*\*C\*\*

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 + \sin a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Dire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2 \log(1 + x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin x - \cos x - e^x + 2.$$

Dimostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x$  nell'intervallo  $(-\delta, 0)$  si ha  $f(x) > 0$ .

4. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (n^n)^n}{2^{(n!)} + n^{(2^n)}}$$

è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}} dx.$$

- (a) mostrare che l'integrale è finito;  
(b) calcolarne il valore.

---

**N.B.** Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

# Analisi Matematica 1

## Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

\*DD\*\*D\*\*

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 + \sin a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

2. Dire per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  è soddisfatta la seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2 \log(1 + x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x + \cos x - \sin x - 2.$$

Dimostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $x$  nell'intervallo  $(-\delta, 0)$  si ha  $f(x) < 0$ .

4. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(2^n)} + (n!)^2}{(n^n)^n + 2^{(n!)}}$$

è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}} dx.$$

- (a) mostrare che l'integrale è finito;  
(b) calcolarne il valore.

---

**N.B.** Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.