

Analisi Matematica IV modulo  
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

18 aprile 2008

1. Risolvere

(8 punti)

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \left( 1 + \frac{1}{\log y - \log x} \right) \\ y(e) = 1. \end{cases}$$

*Soluzione.* Scrivendo  $\log y - \log x = \log(y/x)$  si osserva che l'equazione è omogenea e dunque possiamo provare a risolverla con la sostituzione  $z = y/x$ ,  $y' = z + xz'$ . Si ottiene

$$z + xz' = z \left( 1 + \frac{1}{\log z} \right)$$

da cui

$$z'x = \frac{z}{\log z}$$

che è un'equazione a variabili separabili. Visto che  $z > 0$  e  $x > 0$  (altrimenti  $\log y - \log x$  non sarebbe definito) possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{\log z}{z} z' = \frac{1}{x}.$$

Si tratta dunque di calcolare i due integrali:

$$\int \frac{\log z}{z} z dz = \frac{1}{2} \log^2 z$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x$$

da cui

$$\frac{1}{2} \log^2 z = \log x + c.$$

È il momento di sostituire la condizione iniziale  $y(e) = 1$  che diventa  $z(e) = 1/e$ :

$$\frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{e} = \log e + c$$

cioè

$$\frac{1}{2} = 1 + c$$

da cui si ricava  $c = -\frac{1}{2}$  e quindi

$$\log^2 z = 2 \log x - 1.$$

risolvendo in  $z$  e ricordando che intorno al dato iniziale  $\log z < 0$  si ha

$$\log z = -\sqrt{2 \log x - 1}$$

e quindi

$$y = xz = x e^{-\sqrt{2 \log x - 1}}.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (xy + y) \log y + xy'.$$

- (a) Trovare la soluzione con la condizione  $y(2) = e$ . (8 punti)  
 (b) Discutere se con la condizione  $y(1) = 1$  c'è esistenza e unicità della soluzione. (4 punti)

*Soluzione.* L'equazione può essere riscritta come

$$(1 - x)y' = (x + 1)y \log y$$

che, per  $x \neq 1$ , è un'equazione a variabili separabili. Dopo aver osservato che  $y = 1$  è soluzione, dividiamo per  $(1 - x)y \log y$  e otteniamo

$$\frac{1}{y \log y} y' = \frac{x + 1}{1 - x}.$$

Dunque dobbiamo calcolare i seguenti integrali (ricordiamo che  $y > 0$  perché altrimenti l'equazione data non è definita):

$$\int \frac{1}{y \log y} dy = \log |\log y|$$

$$\int \frac{x + 1}{1 - x} dx = - \int 1 + \frac{2}{x - 1} dx = -x - 2 \log |x - 1|.$$

Dunque troviamo

$$\log |\log y| = -x - 2 \log |x - 1| + c. \tag{1}$$

Per risolvere il punto (a) imponiamo la condizione iniziale  $y(2) = e$

$$\log \log e = -2 - 2 \log 1 + c$$

da cui  $c = 2$  e quindi, osservando anche che intorno al dato iniziale  $\log y > 0$  e  $x > 1$ , si ha

$$\log \log y = 2 - x - 2 \log(x - 1)$$

da cui si ricava

$$y = e^{e^{2-x-2\log(x-1)}} = e^{\frac{e^{2-x}}{(x-1)^2}}.$$

Per risolvere il punto (b) osserviamo che la funzione  $y = 1$  è, per verifica diretta, soluzione dell'equazione data. Per dimostrare l'unicità della soluzione non possiamo però utilizzare il teorema di Cauchy, in quanto l'equazione non è in forma normale. Noi però abbiamo determinato che la formula (1) è valida per tutte le soluzioni dell'equazione differenziale nella parte di piano dove  $x \neq 1$ ,  $y \neq 1$  e  $y > 0$ . Dunque tutte le soluzioni dell'equazione data (tranne  $y = 1$ ), devono soddisfare tale formula per  $x \neq 1$ . Osserviamo però che passando al limite per  $x \rightarrow 1^\pm$  in (1) si ottiene

$$\log |\log y| \rightarrow +\infty$$

da cui  $y \rightarrow +\infty$  oppure  $y \rightarrow 0$ . Se invece  $y$  fosse soluzione del problema di Cauchy con dato  $y(1) = 1$  si avrebbe  $y \rightarrow 1$ . Dunque non ci possono essere altre soluzioni oltre ad  $y = 1$ .

3. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{1+x^2} - xy.$$

In particolare:

- (a) Studiare la soluzione passante per il punto  $(0, \frac{1}{2})$ . (4 punti)
- (b) Determinare il valore  $y(1)$  della soluzione passante per il punto  $(-1, 1)$ . (4 punti)
- (c) Dimostrare che la soluzione passante per il punto  $(0, 1)$  è strettamente decrescente su tutto l'intervallo  $x \geq 0$ . (3 punti)
- (d) Sfruttando il carattere lineare dell'equazione mostrare che la differenza tra due soluzioni tende a zero, per  $x \rightarrow +\infty$ , più velocemente di qualunque potenza. (3 punti)

*Soluzione.* Studiando il segno di  $y'$  osserviamo che le soluzioni sono crescenti per  $x > 0$  e  $y < \frac{1}{1+x^2}$  e per  $x < 0$  e  $y > \frac{1}{1+x^2}$ . Osserviamo anche che se  $y(x)$  è una soluzione, allora anche  $z(x) = y(-x)$  è soluzione. Inoltre l'equazione è definita su tutto il piano  $x, y$  e soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in grande. Dunque le soluzioni saranno definite per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Poniamo  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

- (a) Nel punto  $(0, \frac{1}{2})$ , la nostra soluzione  $y(x)$  ha derivata nulla. Visto che la soluzione  $z(x) = y(-x)$  ha lo stesso dato iniziale  $z(0) = \frac{1}{2}$ , deduciamo che  $y = z$  e dunque la nostra soluzione  $y$  è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle  $y$ . Dunque possiamo studiarla solo per  $x \geq 0$ . In un intorno destro di  $x = 0$  la funzione resterà compresa tra  $0$  e  $\frac{1}{1+x^2}$  dunque sarà strettamente crescente. Necessariamente la soluzione incontra, crescendo, la curva  $g(x)$  in un punto  $\bar{x} > 0$ . In  $\bar{x}$  si ha  $y'(\bar{x}) = 0$  e per  $x > \bar{x}$  si ha necessariamente  $y(x) > g(x)$  in quanto la soluzione non può attraversare la curva  $g$  "dall'alto verso il basso" quando  $g' < 0$ . Dunque per  $x > \bar{x}$  la soluzione risulta essere strettamente decrescente ed inferiormente limitata. Necessariamente ammette limite finito per  $x \rightarrow +\infty$ . Cioè  $y(x) \rightarrow \bar{y} \geq 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Passando al limite nell'equazione differenziale si trova che se fosse  $\bar{y} > 0$  si avrebbe  $y'(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$  e questo è assurdo per una funzione che ha un asintoto orizzontale. Concludiamo quindi che  $\bar{y} = 0$ .
- (b) La soluzione passante dal punto  $(-1, 1)$  deve necessariamente incontrare l'asse  $x = 0$  in quanto tutte le soluzioni hanno esistenza globale. Dunque tale soluzione coincide con la sua simmetrica ed è quindi una funzione pari. Concludiamo quindi che  $y(1) = y(-1) = 1$ .
- (c) Vogliamo dimostrare che la soluzione passante per  $(0, 1)$  incontra la curva  $g(x)$  solamente in corrispondenza di  $x = 0$ . Osserviamo che se per un certo valore  $\bar{x} > 0$  si avesse  $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$ , allora per ogni  $x > \bar{x}$  si avrebbe  $y(x) > g(x)$  in quanto abbiamo già osservato che la soluzione non può attraversare la curva  $g$  dall'alto verso il basso, quando  $x > 0$ . Dunque ci può essere al massimo un valore  $\bar{x} > 0$  per cui  $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$ . Allora per  $x \in (0, \bar{x})$  si avrebbe  $y(x) < g(x)$  e dunque  $y'(x) > 0$ . D'altra parte si avrebbe  $y(\bar{x}) = g(\bar{x}) < g(0) = y(0)$  e dunque per il teorema di Lagrange dovrebbe esistere un punto  $\xi \in (0, \bar{x})$  in cui la derivata è negativa. Questo è assurdo e quindi concludiamo che  $y(x) > g(x)$  per ogni  $x > 0$ . Dunque  $y'(x) < 0$  per  $x > 0$  e  $y$  è strettamente decrescente sull'intervallo  $x \geq 0$ .

(d) La differenza  $z$  tra due soluzioni soddisfa l'equazione lineare omogenea

$$z' = -xz.$$

Infatti se  $y_1, y_2$  sono soluzioni, posto  $z = y_1 - y_2$  si ha

$$z' = y_1' - y_2' = g(x) - xy_1 - g(x) + xy_2 = -xz.$$

L'equazione omogenea si risolve facilmente, e ha come soluzioni

$$z = ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Chiaramente tutte queste funzioni tendono a zero più velocemente di una potenza di  $x$ .

(e) Consideriamo come soluzione particolare dell'equazione data (non omogenea) la soluzione  $\bar{y}(x)$  passante per il punto  $(0, 2)$ . Tale soluzione ha esistenza globale e verifica  $\bar{y}(x) > g(x)$  per ogni  $x$ . Sia ora  $y(x)$  una qualunque soluzione, e poniamo  $z = y - \bar{y}$ . Per quanto visto al punto precedente sappiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)z(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y - \bar{y}}{1 + x^2} = 0.$$

D'altra parte

$$\frac{y - \bar{y}}{1 + x^2} = \frac{y}{1 + x^2} - \frac{\bar{y}}{1 + x^2}$$

e visto che il sottraendo è maggiore di uno ( $\bar{y} > g(x)$ ) e la differenza tende a zero, il primo addendo dovrà diventare positivo, da un certo punto in poi. Dunque  $y(x) > 0$  per  $x$  sufficientemente grande.