

# Analisi Matematica IV modulo

## Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

18 aprile 2008

1. Risolvere

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \left( 1 + \frac{1}{\log y - \log x} \right) \\ y(e) = 1. \end{cases}$$

(8 punti)

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (xy + y) \log y + xy'.$$

(a) Trovare la soluzione con la condizione  $y(2) = e$ .

(8 punti)

(b) Discutere se con la condizione  $y(1) = 1$  c'è esistenza e unicità della soluzione.

(4 punti)

3. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{1+x^2} - xy.$$

In particolare:

(a) Studiare la soluzione passante per il punto  $(0, \frac{1}{2})$ .

(4 punti)

(b) Determinare il valore  $y(1)$  della soluzione passante per il punto  $(-1, 1)$ .

(4 punti)

(c) Dimostrare che la soluzione passante per il punto  $(0, 1)$  è strettamente decrescente su tutto l'intervallo  $x \geq 0$ .

(3 punti)

(d) Sfruttando il carattere lineare dell'equazione mostrare che la differenza tra due soluzioni tende a zero, per  $x \rightarrow +\infty$ , più velocemente di qualunque potenza.

(3 punti)

**Nota.** Si consiglia di svolgere i punti 2.(b), 3.(c) e 3.(d) dopo aver svolto il resto del compito.