

# Analisi Matematica II modulo

## Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

4 aprile 2007

1. Disegnare qualitativamente il grafico della funzione

\*\*\*\*A\*\*

$$f(x) = \log(e^x - 2x)$$

\*\*\*\*B\*\*

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log(x^4 - x + 1)}}$$

\*\*\*\*C\*\*

$$f(x) = \log(x - 2 \log x)$$

\*\*\*\*D\*\*

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log(3x^4 - 4x^3 + 2)}}$$

*Soluzione.*

Chiamiamo  $g(x)$  l'argomento del logaritmo. Per determinare il dominio di definizione di  $f$  bisogna stabilire innanzitutto quando  $g$  è positiva. Facendo la derivata si trova che  $g$  ha un unico punto di minimo assoluto e che la funzione in tale punto è positiva. Dunque la funzione  $g$  è sempre positiva (nel compito C  $g$  è definita solo per  $x > 0$  per via del secondo logaritmo, nel compito D  $g$  ha anche un flesso orizzontale).

Nel compito A la funzione è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , ha un minimo in  $\log 2$ , ha asintoto obliquo  $y = x$  per  $x \rightarrow +\infty$  e tende asintoticamente alla funzione  $\log(-2x)$  per  $x \rightarrow -\infty$ .

Nel compito B bisogna determinare i punti in cui si annulla il denominatore. Questo succede se  $x^4 - x + 1 = 1$  ovvero se  $x(x^3 - 1) = 0$  cioè per  $x = 0$  e  $x = 1$ . I limiti agli estremi del dominio sono: 1 per  $x \rightarrow -\infty$ ,  $+\infty$  per  $x \rightarrow 0^-$ , 0 per  $x \rightarrow 0^+$ , 0 per  $x \rightarrow 1^-$  e 1 per  $x \rightarrow +\infty$ . In  $0^+$  e  $1^-$  anche la derivata tende a zero. La funzione ha un massimo locale in  $\sqrt[3]{2}/2$ .

Nel compito C la funzione è definita per  $x > 0$ . Ha un minimo assoluto in  $x = 2$ . Tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  e tende asintoticamente a  $\log x$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Nel compito D la funzione  $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$  ha un minimo assoluto in  $x = 1$  e si ha  $g(1) = 1$ , inoltre presenta un flesso orizzontale in  $x = 0$ . Dunque il logaritmo al denominatore è sempre non negativo e si annulla per  $x = 1$ . La funzione quindi è definita su  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Per  $x \rightarrow \pm\infty$  si ha  $f(x) \rightarrow 1$ , mentre per  $x \rightarrow 1^\pm$  si ha  $f(x) \rightarrow +\infty$ . La funzione  $f'$  ha segno opposto a quello di  $g'$ . In particolare  $f$  ha pure un flesso orizzontale per  $x = 0$ .

2. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin(e^x - 1) - 1}{\cos(\sin x) - \cos x}$$

\*\*\*\*\*A\*\*

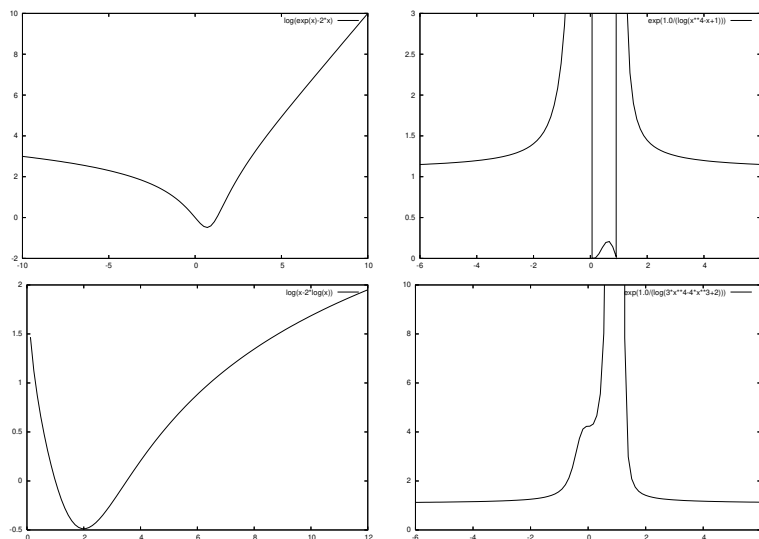


Figura 1: I grafici di funzione dell'esercizio 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sin(e^x - 1) - 1}{x \sin x - x \operatorname{tg} x}$$

\*\*\*\*\*B\*\*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{1 - \cos(1 - \cos x)}$$

\*\*\*\*\*C\*\*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x) - x \operatorname{tg}(x)}{1 - \cos(1 - \cos x)}$$

\*\*\*\*\*D\*\*

Utilizzando gli sviluppi

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin(e^x - 1) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(1 - \cos x) = 1 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$x \sin x - x \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

si ottengono rispettivamente i limiti:  $-1/2$ ,  $-1/6$ ,  $4/3$ ,  $-4$ .

3. Dire, motivando la risposta, se la seguente funzione è uniformemente continua sull'intervallo  $(0, +\infty)$ :

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2x+1}$$

$$f(x) = \log(1+x^2)$$

\*\*\*\*\*A\*

\*\*\*\*\*B\*

\*\*\*\*\*C\*

\*\*\*\*\*D\*

*Soluzione.* Per quanto riguarda la prima funzione si osserva che  $f$  è derivabile e che la derivata tende a zero per  $x \rightarrow +\infty$  ed ha limite finito  $-1/2$  per  $x \rightarrow 0^+$ . Questo significa che la derivata è limitata in un intorno destro di  $0$ ,  $(0, \epsilon]$  e in un intorno di  $+\infty$ ,  $[M, +\infty)$ . Per il Teorema di Weierstraß essendo continua, la derivata è limitata anche sull'intervallo  $[\epsilon, M]$  e dunque è limitata su tutta la semiretta  $(0, +\infty)$ . Essendo la derivata limitata, la funzione  $f$  è lipschitziana e quindi uniformemente continua.

La seconda funzione è pure derivabile con derivata continua. La derivata tende a  $-1$  per  $x \rightarrow 0^+$ . Dunque la derivata è limitata in un intorno di  $0^+$ ,  $(0, \epsilon]$ . Inoltre dalla stima  $|\sin| \leq 1$  si ottiene facilmente che per  $x \geq \epsilon$  si ha  $|f(x)| \leq 1/\epsilon$ . Dunque la funzione  $f'$  è limitata su tutta la semiretta  $(0, +\infty)$  e quindi  $f$  è lipschitziana ed uniformemente continua.

La terza e la quarta funzione hanno proprietà analoghe alla prima, la derivata è continua ed ha limite finito in  $0^+$  e in  $+\infty$ .

Dire inoltre se la seguente funzione è lipschitziana sull'intervallo  $(0, +\infty)$ :

$$g(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}$$

$$g(x) = \log(e^x - 1)$$

$$g(x) = \frac{\sin(x^3)}{x}$$

\*\*\*\*\*A\*

\*\*\*\*\*B\*

\*\*\*\*\*C\*

\*\*\*\*\*D\*

*Soluzione.* La prima funzione  $f(x)$  ha derivata

$$f'(x) = \frac{\pi}{(2x+1) \cos \frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{\pi/2}{2x+1}}$$

e quindi si osserva che  $f'(x) \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow +\infty$  e tende a 1 anche per  $x \rightarrow 0^+$ . In definitiva  $f'(x)$  è una funzione limitata e quindi  $f$  è lipschitziana.

Lo stesso ragionamento si può fare per la seconda funzione.

La terza funzione non è lipschitziana. Per dimostrarlo è sufficiente trovare una successione di punti  $x_k$  tale che  $f'(x_k) \rightarrow \infty$ . Essendo

$$f'(x) = 3x \sin(x^3) - \sin(x^3)$$

basta scegliere  $x_k = \pi/2 + 2k\pi$  per ottenere  $f'(x) = 3x_k - 1 \rightarrow \infty$  per  $k \rightarrow \infty$ .