# Analisi Matematica I modulo
# Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

17 gennaio 2007

1. Sia $a_n$ una successione che soddisfa la proprietà
$$a_{n+1} = 1 + \operatorname{arctg}(a_n - 1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Calcolare (se esiste) il limite della successione $a_n$.

   *Soluzione.* Si tratta di una successione definita per ricorrenza nella forma $a_{n+1} = f(a_n)$ dove si è posto $f(x) = 1 + \operatorname{arctg}(x - 1)$. Osserviamo che la funzione $f$ ha le seguenti proprietà (che possono essere dimostrate studiando la derivata di $f$):

   (a) $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1, \qquad x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1$
   (b) $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq x, \qquad x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq x.$

   Dalla prima proprietà si deduce che se $a_n \geq 1$ allora anche $a_{n+1} \geq 1$. Dalla seconda si deduce che se $a_n \geq 1$ allora $a_{n+1} \leq a_n$. Ragionando per induzione, se $a_1 \geq 1$ allora $a_n \geq 1$ per ogni $n$ e $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n$. Dunque in questo caso la successione è decrescente e limitata e di conseguenza è convergente. Viceversa se $a_1 \leq 1$ si ottiene che la successione è crescente e limitata e quindi anche in questo caso converge.

   Sapendo che $a_n \to a \in \mathbb{R}$ (la successione è convergente), possiamo facilmente trovare i possibili valori di $a$ passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$. Visto che $f$ è continua si ottiene infatti $a = f(a)$ che ha come unica soluzione $a = 1$ (sempre in base alla proprietà (a) enunciata in precedenza).

2. Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente
$$\lim_{x\to+\infty} \sin x - \sin \frac{1+x}{x}.$$

   *Soluzione.* Il limite non esiste, infatti scegliendo le successioni
$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$
si ottiene
$$x_n \to +\infty, \qquad y_n \to +\infty.$$
D'altra parte
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 - \sin \frac{1+x_n}{x_n} = 1 - \sin 1$$
mentre
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} -1 - \sin \frac{1+y_n}{y_n} = -1 - \sin 1.$$
Se il limite in questione esistesse, per il teorema di collegamento, i due limiti ottenuti lungo le successioni $x_n$ e $y_n$ dovrebbero essere uguali.

3. Si consideri la disequazione

$$\log(1+x^2) \geq (\operatorname{arctg} x) - x.$$

Mostrare che

(a) la disequazione è valida per ogni $x \geq 0$;

(b) la disequazione è valida in un intorno sinistro di 0;

(c) la disequazione non è valida per ogni $x \in \mathbb{R}$.

*Soluzione.* Posto $f(x) = \log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + x$, la disequazione da studiare si può scrivere come $f(x) \geq 0$. Osserviamo che si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + 1 = \frac{x^2+2x}{1+x^2}$$

e in particolare $f'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$. Dunque la funzione $f$ è crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$ ed essendo $f(0) = 0$ concludiamo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.

Osserviamo anche che $f'(x) \leq 0$ se $x \in [-2, 0]$ e dunque la funzione è decrescente sull'intervallo $[-2, 0]$. Analogamente a prima, essendo $f(0) = 0$ otteniamo che $f(x) \geq f(0) = 0$ per $x \in [-2, 0]$. Dunque la disequazione è verificata in un intorno sinistro di 0.

Per l'ultima questione basta notare che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

e in base al teorema della permanenza del segno possiamo affermare che esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \leq -M$ si ha $f(x) < 0$.