Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi Matematica III modulo

a.a. 2005-2006

---[5.10.2005 (2 ore)]

Funzioni in più variabili. Definizione di limite. Se $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ allora (senza dimostrazione)

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to \bar{x}} f_k(x) = \bar{y}_k \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste. Ma entrambi i limiti

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

esistono. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^6+y^8}}{x^2+y^2} = 0.$$

---[18.10.2005 (2 ore)]

Il teorema di Schwarz. La funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^3 - x^3y}{x^2+y^2}$$

ha derivate seconde miste diverse. Derivabilità, gradiente. Definizione di differenziabilità.

[19.10.2005 (2 ore)]

riteri per l'esistenza e la non esistenza dei limiti in più variabili.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ non esiste}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+|y\sin y|}}{(1+y^2)e^y+\cos x+1} =?,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{|x|+y^2} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{12}}{x+y} \text{ non esiste}.$$

Posto

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } |y| \le x^2 \\ \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } |y| > x^2 \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{y^2-|x|}}{\sqrt{|y|}} = 0.$$

[21.10.2005 (1 ora)]

Definizione di differenziabilità tramite operatori lineari. La funzione

$$\frac{xy}{x^2+y^2}$$

estesa a 0 nell'origine, risulta essere derivabile ma non differenziabile in $(0,0)$.

[26.10.2005 (2 ore)]

Una funzione differenziabile è continua. Teorema del differenziale. Studio delle derivate prime e seconde di

$$f(x,y) = \frac{x^4-x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f(0,0)=0.$$

[9.11.2005 (2 ore)]

Determinare le derivate parziali, il gradiente e le derivate direzionali della funzione $f(x,y) = xe^{2y}$. Studiare la continuità e determinare le derivate direzionali della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y\sin(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}) & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Sia $A = \{(x,y)\colon |y| \le |x|^3\}$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y+x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostrare che per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \beta y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Possiamo parlare della differenziabilità di f in $(0,0)$?

[11.11.2005 (1 ora)]

Teorema di Weierstrass. Topologia di $\mathbb{R}^n$. Massimi e minimi.

[23.11.2005 (2 ore)]

Esercizi su massimi e minimi assoluti.

[30.11.2005 (2 ore)]

Massimi e minimi con Hessiano nullo. Videoproiezione.

[2.12.2005 (1 ora)]

Convergenza uniforme.

[7.12.2005 (2 ore)]

Convergenza totale e puntale di serie di funzioni.