

Analisi Matematica III e IV modulo

Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

7 luglio 2006

1. Dire se la funzione

$$f(x, y) = x^6 - x^3y^5 + y^{10}$$

ha un massimo o minimo, relativo o assoluto nel punto $(0, 0)$.

Soluzione. È sufficiente calcolare una derivata parziale

$$f_x(x, y) = 6x^5 - 3x^2y^5 = 3x^2(2x^3 - y^5)$$

per verificare che fissato y la funzione $x \mapsto f(x, y)$ ha un minimo assoluto (stretto) sulla curva $2x^3 = y^5$. Considerando poi la funzione f ristretta a tale curva: $y \mapsto f(\sqrt[3]{y^5/2}, y) = y^{10}/4 - y^{10}/2 + y^{10} = 3y^{10}/4$ si scopre che per $y = 0$ tale funzione ha un minimo assoluto (stretto). Dunque per ogni punto (x, y) si ha $f(x, y) \geq f(\sqrt[3]{y^5/2}, y) \geq f(0, 0)$. Dunque $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto per f su tutto \mathbb{R}^2 (ed è l'unico punto critico di f).

Soluzione alternativa. Posto $g(x, y) = x^2 - xy + y^2$ è facile verificare che g ha un minimo assoluto stretto in 0 (g è una forma quadratica). Essendo $f(x, y) = g(x^3, y^5)$ la stessa proprietà vale per f .

2. (a) Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

- (b) Dimostrare che vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Soluzione. L'eguaglianza (a) vale per ogni $x \in (-1, 1)$ in quanto a primo membro non c'è altro che la serie geometrica di ragione $q = -x^2$ mentre a

secondo membro troviamo $1/(1 - q)$ che è proprio la somma di tale serie se (e solo se) $|q| < 1$. Inoltre osserviamo che abbiamo a che fare con una serie di potenze con raggio di convergenza $R = 1$, dunque la serie converge totalmente e uniformemente su tutti gli intervalli $[-r, r]$ con $r < 1$.

Per quanto riguarda la serie in (b) osserviamo che derivando termine a termine si ottiene la serie in (a). Fissato un intervallo $[-r, r] \subset (-1, 1)$, la serie in (a) converge uniformemente, inoltre la serie in (b) converge puntualmente per $x = 0$. Dunque, per il teorema sulla derivazione per serie, possiamo affermare che la serie (b) converge uniformemente sull'intervallo $[-r, r]$ e la sua somma ha come derivata $1/(1 + x^2)$. Dunque la somma della serie in (b) è $\arctg x + c$ per qualche costante c . Notando poi che per $x = 0$ la somma è zero, si deduce $c = 0$ e dunque l'uguaglianza in (b) è dimostrata.

3. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{2y e^{x^2}} + xy$$

Soluzione. Si tratta di una equazione di Lagrange, definita per $y \neq 0$. Moltiplicando tutto per $2y$ si ottiene

$$2yy' = xe^{-x^2} + 2xy^2$$

ponendo poi $z = y^2$ si ha

$$z' = xe^{-x^2} + 2xz$$

che è una equazione lineare in z :

$$z' - 2xz = xe^{-x^2}$$

moltiplichiamo tutto per e^{-x^2} per ottenere

$$z'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}z = xe^{-2x^2}$$

cioè

$$(ze^{-x^2})' = -\frac{1}{2}(e^{-2x^2})'.$$

Da

$$-2ze^{-x^2} = e^{-2x^2} + c.$$

si ottiene dunque

$$y^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}ce^{x^2}$$

ovvero posto $C = -\frac{1}{2}c$

$$y = \pm \sqrt{Ce^{x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}}.$$

4. Si consideri il semicerchio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$.

(a) Calcolare il baricentro (\bar{x}, \bar{y}) di D :

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{m(D)}$$
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{m(D)}$$

($m(D)$ indica la misura del dominio D).

(b) Sia $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la mappa $T(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Calcolare la misura dell'insieme $T(D)$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che per questioni di simmetria si deve avere $\bar{y} = 0$.

Per quanto riguarda \bar{x} , sappiamo che $m(D) = \pi/2$ in quanto è l'area di mezzo cerchio di raggio 1. Calcoliamo quindi \bar{x} passando in coordinate polari $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $dx \, dy = \rho \, d\rho \, d\theta$, $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\rho \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^1 \rho(\cos \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} [\rho^3/3]_0^1 \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} [\sin \theta]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dunque si ottiene $\bar{x} = -\frac{4}{3}\pi$.

Per quanto riguarda il punto (b) osserviamo innanzitutto che la mappa T è iniettiva per $x < 0$ e $y \in (-\pi, \pi)$. Applicando la formula del cambio di variabili per $(\xi, \eta) = T(x, y)$, $d\xi \, d\eta = |\det DT(x, y)| \, dx \, dy$

$$m(T(D)) = \iint_{T(D)} d\xi \, d\eta = \iint_D |x| \, dx \, dy = - \iint_D x \, dx \, dy = \frac{2}{3}.$$