

Analisi Matematica IV modulo

Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

22 maggio 2006

1. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \omega$ della forma differenziale

$$\omega = \frac{-2xy^2 dx + 2x^2y dy}{x^4 + y^4}$$

sulla curva

$$\gamma(t) = (t^4 - t^3, t^3 - 3t - 2), \quad t \in [0, 2].$$

Soluzione. La forma differenziale ω è definita sull'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si verifica facilmente che la forma differenziale è chiusa. Proviamo allora a trovare una primitiva:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2xy^2}{x^4 + y^4}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^4}.$$

Supponendo $y \neq 0$ si ottiene (dalla prima equazione):

$$F = \int \frac{-2xy^2}{x^4 + y^4} dx = \int \frac{-\frac{2}{y^2}x}{1 + \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2} dx = -\operatorname{arctg} \frac{x^2}{y^2} + c(y).$$

Derivando rispetto a y si trova facilmente $c'(y) = 0$ e quindi una primitiva, per $y \neq 0$ è data da

$$F(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x^2}{y^2}.$$

Osserviamo che per $y \rightarrow 0$ la funzione F tende a $-\pi/2$, possiamo quindi estenderla per continuità a tutto Ω :

$$F(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x^2}{y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Questa funzione risulta essere continua e differenziabile su Ω (basta osservare che per $x, y \neq 0$ si ha $-\operatorname{arctg}(x^2/y^2) = \operatorname{arctg}(y^2/x^2) - \pi/2$) e si ha $\omega = F_x dx + F_y dy$.

Dunque ω è una forma differenziale esatta e si ha

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(2)) - F(\gamma(0)) = F(8, 0) - F(0, -2) = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

esteso al dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Soluzione. Risolviamo l'integrale utilizzando le coordinate polari: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $dx dy = \rho d\rho d\theta$. Il dominio D diventa

$$D' = \{(\rho, \theta): \theta \in [0, \pi/4], \frac{1}{\cos \theta} \leq \rho \leq \sqrt{2}\}.$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \iint_{D'} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} \sin \theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin \theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\frac{1}{\cos \theta}}^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{\pi/4} \sin \theta \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3 \cos^3 \theta} \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \theta - \frac{1}{6 \cos^2 \theta} \right]_0^{\pi/4} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 5}{6}. \end{aligned}$$

3. Dopo averla disegnata, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dalla curva

$$\gamma(t) = (\sin(2t), \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione. Si osserva che la curva percorre una figura a forma di '8'. In particolare nel tratto $t \in [0, \pi]$ la curva è percorsa in senso antiorario mentre per $t \in [\pi, 2\pi]$ la curva è percorsa in senso orario. L'area della regione racchiusa, per simmetria, sarà due volte l'area della parte superiore. Per calcolare l'area complessiva possiamo dunque integrare la forma differenziale $x dy$ sul tratto di curva $t \in [0, \pi]$ e moltiplicare il risultato per due:

$$2 \int_0^\pi x dy = 2 \int_0^\pi \sin(2t) \cos t dt = 4 \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt = -4 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = \frac{8}{3}.$$