Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

29 novembre 2005

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^{13}+x^{26}}{x^6+y^{26}}.$$

   Soluzione. Il limite non esiste. Infatti per $x=0$ la funzione è identicamente nulla, mentre per $x=y^{\frac{13}{3}}$, $y>0$, il limite diventa
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^{26}+y^{\frac{26\cdot 13}{6}}}{2y^{26}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{2}+\frac{y^{\frac{26\cdot 7}{6}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^y - x^2e^x + y^2\sin^2 x - x^4y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

   (a) Dire se f è continua.
   (b) Dire se f è derivabile.
   (c) Dire se f è differenziabile.
   (d) Calcolare $f_{yxx}(\pi,0)$ (dove $f_{yxx}=(f_y)_{xx}$).

   Soluzione. Su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e in particolare è continua, derivabile, e differenziabile. La questioni (a), (b) e (c) si pongono dunque solo nel punto $(0,0)$.

   (a) Si ha,
$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \left|\frac{x^2(e^y-e^x)+y^2\sin^2 x - x^4y}{x^2+y^2}\right| \\ &\le \frac{(x^2+y^2)|e^y-e^x| + (x^2+y^2)\sin^2 x + (x^2+y^2)x^2y}{x^2+y^2} \\ &= |e^y-e^x| + \sin^2 x + x^2y \to 0 \qquad \text{per } (x,y)\to(0,0). \end{aligned}$$

Dunque f è continua in $(0,0)$.

(b) Calcoliamo le derivate parziali in $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 e^x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} = -1;$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Dunque f è derivabile in $(0,0)$ e si ha $\nabla f(0,0) = (-1,0)$.

(c) Verifichiamo ora se f è anche differenziabile in $(0,0)$. Sia

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle \nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2e^y - x^2e^x + y^2\sin^2 x - x^4 y + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Notiamo che si ha

$$g(x,x) = \frac{x^2\sin^2 x - x^5 + 2x^3}{2\sqrt{2}|x|^3}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} g(x,x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Questo implica che g non tende a zero per $(x,y)\to(0,0)$ e quindi che f non è differenziabile in $(0,0)$.

(d) Calcoliamo ora $f_y(x,0)$ per $x\neq 0$ con le usuali regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f_y(x,0) &= f_y(x,y)_{|y=0} \\ &= \left.\frac{(x^2e^y + 2y\sin^2 x - x^4)(x^2+y^2) - (\ldots)2y}{(x^2+y^2)^2}\right|_{y=0} \\ &= \frac{(x^2-x^4)x^2}{x^4} = 1 - x^2. \end{aligned}$$

Dunque si ha $f_{yxx}(x,0) = (f_y(x,0))'' = (1-x^2)'' = -2$. In particolare $f_{yxx}(\pi,0) = -2$.

3. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x$.
   (a) Determinare i punti critici, e i punti di massimo o minimo relativo.
   (b) Determinare l'insieme dei punti di massimo o minimo assoluto.
   (c) Determinare i punti di massimo o minimo relativo di f ristretta al cerchio unitario centrato nell'origine $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\le 1\}$.

(d) Sia f come in precedenza e $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione composta $g(x,y) = F(f(x,y))$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha almeno un punto di massimo o di minimo relativo.

Soluzione. (a) Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + y^2 - 1 \\ f_y &= 2xy. \end{aligned}$$

Notiamo che la derivata f_y si annulla sugli assi coordinati; la derivata f_x si annulla su una ellisse avente come assi gli assi coordinati. I punti critici sono dunque dati dall'intersezione dell'ellisse con gli assi coordinati, ovvero i quattro punti: $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$. Calcoliamo ora la matrice delle derivate seconde:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

e nei punti critici si ha

$$D^2 f(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2 f(\pm 1/\sqrt{3}, 0) = \begin{pmatrix} \pm 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \pm 6\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso la matrice Hessiana ha due autovalori negativi e dunque i punti $(0, \pm 1)$ sono punti di sella. Nel punto $(1/\sqrt{3}, 0)$ la matrice Hessiana ha due autovalori positivi e dunque tale punto è un minimo relativo. Il punto $(-1/\sqrt{3}, 0)$ è invece un punto di massimo relativo in quanto gli autovalori sono negativi. I valori assunti nel massimo e minimo relativo sono $f(\pm 1/\sqrt{3}, 0) = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

(b) Notiamo ora che $f(x, 0) = x^3 - x$ e quindi $\lim_{x \to \pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty$. Dunque $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. In particolare f non può avere nè massimo nè minimo assoluto.

(c) Sul cerchio unitario D la funzione deve invece avere quantomeno massimo e minimo assoluto per il teorema di Weierstrass. Notiamo ora che $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1)$ e dunque la funzione si annulla su tutta la frontiera ∂D del cerchio. Inoltre è molto semplice valutare il segno di f. In particolare i punti $(x, y) \in \partial D$ con $x > 0$ sono tutti punti di massimo relativo in quanto nell'intorno di tali punti la funzione è sempre non positiva. Nell'intorno dei punti $(x, y) \in \partial D$ con $x < 0$ la funzione è invece sempre non negativa e dunque tutti questi punti sono punti di minimo relativo. I punti $(0, \pm 1)$ non sono invece nè massimo nè minimo in quanto in ogni intorno di questi punti la funzione assume sia segno positivo che negativo. Tra i punti interni solo i punti critici possono essere massimi o minimi relativi. In effetti i due punti critici $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ sono il massimo e minimo assoluto di f ristretta a D.

(d) Se ora consideriamo $g(x, y) = F(f(x, y))$ sappiamo che g assume massimo e minimo assoluti su D. Se almeno uno di questi punti (massimo o minimo) sta all'interno di D, allora quello è un massimo o un minimo relativo di g. D'altra parte notiamo che $g(x, y) = F(0)$ è costante quando $(x, y) \in \partial D$. Dunque se sia il massimo che il minimo assoluto di g su D sta sulla frontiera ∂D significa che g è costante su tutto D. In particolare ogni punto interno a D risulta essere sia massimo che minimo relativo per g.