

Analisi Matematica III modulo

Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

29 novembre 2005

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^{13} + x^{26}}{x^6 + y^{26}}.$$

2. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 e^y - x^2 e^x + y^2 \sin^2 x - x^4 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Dire se f è continua.
(b) Dire se f è derivabile.
(c) Dire se f è differenziabile.
(d) Calcolare $f_{yxx}(\pi, 0)$.
3. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$.
- (a) Determinare i punti critici, e i punti di massimo o minimo relativo.
(b) Determinare l'insieme dei punti di massimo o minimo assoluto.
(c) Determinare i punti di massimo o minimo relativo di f ristretta al cerchio unitario centrato nell'origine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(d) Sia f come in precedenza e $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione composta $g(x, y) = F(f(x, y))$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ha almeno un punto di massimo o di minimo relativo.