# Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi I modulo

a.a. 2004-2005

---[28.9.2004]

Introduzione allo studio di funzioni. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali. L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile.

---[13.10.2004]

La funzione $x^2$ è crescente per $x \geq 0$ (utilizzando gli assiomi). L'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione reale positiva (utilizzando l'assioma di completezza).

Funzioni monotone e strettamente monotone, iniettive, surgettive e invertibili. Funzioni elementari: funzioni lineari, valore assoluto, potenza e radice.

---[14.10.2004]

Funzioni elementari: funzione esponenziale e logaritmo.

Verifica dei limiti mediante la definizione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{1+n} = -1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + (-1)^n}{n} = 0.$$

Per casa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 42n^3 + 37}{2n^5 - 5n^4 + n} = \frac{1}{2}.$$

---[21.10.2004]

Un poco di logica delle proposizioni. Le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti:

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon > 0\,\exists\nu\,\forall n \geq \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\,\exists\nu\,\forall n > \nu \quad |a_n - a| \leq \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\,\exists\nu\,\forall n \geq \nu \quad |a_n - a| \leq \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\,\exists\nu\,\forall n > \nu + 23 \quad |a_n - a| < \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\,\exists\nu\,\forall n > \nu \quad |a_{n+1} - a| < \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\,\exists\nu\,\forall n > 17\nu \quad |a_n - a| < \varepsilon/12\\
&\forall\varepsilon \in (0,1)\,\exists\nu\,\forall n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Le seguenti proprietà, invece, non sono equivalenti a $\lim a_n = a$:

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon \geq 0\,\exists\nu\,\forall n > \nu \quad |a_n - a| < \varepsilon\\
&\forall\varepsilon \geq 0\,\exists\nu\,\forall n > \nu \quad |a_n - a| \leq \varepsilon\\
&\forall\varepsilon > 0\,\exists n \quad |a_n - a| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Verifica dei limiti mediante la definizione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} - 2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1.$$

---[25.10.2004]

Estremo superiore ed estremo inferiore. Insiemi superiormente (ed inferiormente) limitati. Massimo e minimo. Relazione tra sup e max. Come dimostrare che

$$\sup[0,1) = 1, \qquad \inf[0,1) = 0, \qquad \max[0,1) \text{ non esiste}, \qquad \min[0,1) = 0.$$

Per casa, determinare sup e inf dei seguenti insiemi.

$$\mathbb{N}, \mathbb{Q},$$

$$\left\{\frac{n^2+1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{1+n}{1+n^2} \colon n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{n+1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\{(-1)^n(1+1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}, \quad \{(-1)^n + 1/n \colon n \in \mathbb{N}\}, \quad \{1 + (-1)^n/n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

---[28.10.2004]

Limiti notevoli:

$$a_n \to 0 \Rightarrow \sin a_n \to 0, \quad \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \dots$$

Successione limitata per infinitesima. Criterio del rapporto. Fattoriale.

$$\log n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\sin\frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} (1+\sin\frac{1}{n})^n.$$

Per casa:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+7}{n^2+6}\right)^{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

---[4.10.2004]

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2+2^n)}{n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n\log n + n!}{n^n+2^n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-2^n}{n!+\log n}\sin\frac{1}{n}.$$

Determinare (se esiste) il limite delle seguenti successioni definite per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 1 + a_n^2 \end{cases}$$

e per casa

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}. \end{cases}$$

---[8.11.2004]

Rivisti gli esercizi lasciati la lezione precedente. Calcolare il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 1 + \frac{na_n}{n+1}. \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

dove $F_n$ è la successione di Fibonacci definita da

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

[11.11.2004]

Successioni definite per ricorrenza: $a_{n+1} = f(a_n)$. Supponiamo che $f(I) \subset I$ dove $I$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ e supponiamo che $a_1 \in I$. Se $f$ è crescente su $I$ e $a_1 \in I$ allora $a_n$ è monotòna. Se $f$ è decrescente su $I$ allora $a_{2k}$ e $a_{2k+1}$ sono monotòne.

Esempio: $a_{n+1} = \cos a_n$ (supponiamo di saper dimostrare che $\cos\cos x = x$ ha una unica soluzione).

Valori limite di una successione. Massimo e minimo limite. Esempi: $(-1)^n$, $(-2)^n$.

[15.11.2004]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \sqrt{2}\, n \rfloor}{n}.$$

Posto $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ calcolare $\liminf a_n$ e $\limsup a_n$. Per casa: calcolare tutti i valori limite di $a_n$.

[18.11.2004]

Studio della successione $a_n = \sin(nx)$. Se $x/\pi \in \mathbb{Q}$ allora la successione è periodica. Altrimenti la successione non ammette limite e l'insieme dei valori limite è $[-1, 1]$.

[22.11.2004]

Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni. Esempi:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi n + \pi/2) \text{ non esiste} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \sin x \text{ non esiste;}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sin(1/n) = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x) \text{ non esiste} \quad \text{nonostante che} \quad \lim_{n\to\infty} \sin(n x) = 0.$$

Verifica dei limiti di funzione mediante la definizione (trovare esplicitamente $\delta$ in funzione di $\varepsilon$):

$$\lim_{x\to 10} x^3 - 3x = 970, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{x - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

[24.11.2004]

Esercizi di ricapitolazione. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^n)!}{(n!)^n}.$$
Trovare una sottosuccessione $a_{n_k}$ della successione
$$a_n = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$$
che converge al limite 2004. Studiare la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n}{2} \end{cases}$$
al variare del parametro $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

[2.12.2004]

Consegna dei compitini. Errori su cui riflettere:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{??}{=} \lim_{n\to\infty} b^n = \infty \qquad \text{con } b > 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{??}{=} \lim_{n\to\infty} (1+0)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n(1 + \frac{1}{4n})\right) \stackrel{??}{=} \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0.$$

[15.12.2004]

Formula di derivazione della funzione inversa: $D \arctan x$, $D \arcsin x$, $D \arccos x$.

Dire se le seguenti funzioni sono continue, derivabili e se la derivata è continua:
$$\begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \le 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \ge 0 \\ \sin x & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 & \text{se } x \ge 0 \\ \cos x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

[16.12.2004]

Studiare la continuità della funzione
$$f(x) = \begin{cases} (2x - \pi) \tan x & \text{se } \cos x \ne 0 \\ -2 & \text{se } \cos x = 0. \end{cases}$$

Calcolare la derivata (dove esiste) della funzione

$$\sqrt{x^2|\sin x|}.$$

Criterio di monotonia. Dimostrare che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è bigettiva. Dimostrare che l'equazione $10 \arctan x = 7 + x$ ha una e una sola soluzione.

---

Aggiornato al 22 aprile 2024.