Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

17 gennaio 2006

1. Dire se la funzione
$$f(x) = \sqrt{|x\cos x - \sin x|}$$
è derivabile nel punto $x = 0$.

   Soluzione. Si tratta di calcolare il seguente limite
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h\cos h - \sin h|}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h(1+o(h^2)) - h + o(h^2)|}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|o(h^2)|}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{\left|\frac{o(h^2)}{h^2}\right|}\frac{|h|}{h} = 0.\end{aligned}$$
Dunque la funzione è derivabile, con derivata nulla, per $x = 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = x + \operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x})$$
   (a) Determinare l'insieme dei valori assunti da f.
   (b) Determinare l'insieme dei valori assunti dalla funzione composta $f \circ f$.

   Soluzione. Osserviamo innazitutto che la funzione non è definita per $x = 0$, e si ha
$$\lim_{x\to 0^\pm} = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty.$$
La derivata vale
$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + (1 + 1/x)^2} = \frac{2x(x+1)}{2x^2 + 2x + 1}.$$
Dunque la funzione è crescente per $x \le -1$, e descrescente per $x \in [-1, 0)$ e crescente per $x > 0$. L'unico punto critico è il massimo relativo nel punto $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$. Ne consegue che $f((-\infty, 0)) = (-\infty, -1]$ e $f((0, +\infty)) = (\pi/2, +\infty)$. Complessivamente l'insieme dei valori assunti da f è $(-\infty, -1] \cup (\pi/2, +\infty)$.

   Studiamo la funzione composta $f \circ f$ nei tre intervalli di monotonia $(-\infty, -1]$, $[-1, 0)$ e $(0, +\infty)$. In $(-\infty, -1]$ la funzione f è crescente e ha valori nello stesso intervallo $(-\infty, -1]$ dunque anche $f \circ f$ è crescente e assume gli stessi valori $f(f((-\infty, -1])) = (-\infty, -1]$. Sull'intervallo $[-1, 0)$ la funzione f è decrescente e ha valori in $(-\pi/2, -1]$ che è contenuto nell'intervallo già considerato $(-\infty, -1]$. Dunque $f(f([-1, 0))) = f((-\pi/2, -1]) \subset (-\infty, -1]$. Infine sull'intervallo $(0, +\infty)$ la funzione f assume i valori $(\pi/2, +\infty) \subset (0, +\infty)$. Dunque si ha $f(f((0, +\infty))) = f((\pi/2, +\infty)) = (f(\pi/2), +\infty) = (\pi/2 + \operatorname{arctg}(1 + 2/\pi), +\infty)$. Complessivamente abbiamo trovato che i valori assunti da $f \circ f$ sono $(-\infty, -1] \cup (\pi/2 + \operatorname{arctg}(1 + 2/\pi), +\infty)$.

3. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{\log t}{t}\, dt.$$

Soluzione. Si ha
$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\log t}{t}\, dt &= \frac{1}{2}[\log^2 t]_x^{2x} = \frac{1}{2}[\log^2(2x) - \log^2(x)]\\ &= \frac{1}{2}(\log(2x)+\log(x))(\log(2x)-\log(x))\\ &= \frac{1}{2}(\log 2 + 2\log(x))\log 2\end{aligned}$$
e quindi il limite cercato vale
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log 2}{2}\cdot\frac{\log 2 + 2\log(x)}{x^2} = 0.$$

4. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = \cos(\sin(x^2)) - 1 + \frac{1}{2}x^4$$
ha un minimo relativo nel punto $x = 0$.

Soluzione. Si ha
$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - \frac{1}{2}(\sin(x^2))^2 + \frac{1}{4!}(\sin(x^2))^4 + o((\sin(x^2))^4) - 1 + \frac{1}{2}x^4\\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + o(x^6))^2 + \frac{1}{4!}(x^2+o(x^2))^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^8)\\ &= -\frac{1}{2}(x^4 - \frac{1}{3}x^8 + o(x^8)) + \frac{1}{4!}x^8 + o(x^8) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^8)\\ &= \frac{3}{8}x^8 + o(x^8).\end{aligned}$$
Dunque si ha che
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^8} = \frac{3}{8} > 0$$
e quindi, per il teorema della permanenza del segno, la funzione $f(x)/x^8$ risulta essere positiva in un intorno di zero. Dunque anche $f(x)$ è positiva in un intorno di zero mentre $f(0) = 0$. Questo significa che f ha un minimo relativo in 0.